

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Московский государственный  
гуманитарно-экономический университет

**В.А. КАДЫМОВ**

**ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.  
ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ  
ИСЧИСЛЕНИЕ**

*Учебно-методическое пособие*

Москва  
2018

**УДК 517**  
**ББК 22.161.1**  
К 13

Рецензенты:

*Уварова Л.А.*, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой прикладной математики  
ФГБОУ ВО МГТУ Станкин

*Яновская Е.А.*, канд. тех. наук, доцент кафедры

**В.А. Кадымов**

К 13      **В.А. Кадымов**      **Функции многих переменных. Теория пределов. Дифференциальное ис-  
числение: учебно-методическое пособие. – М.: МГГЭУ, 2018. – 80 с.**

**ISBN 978-5-9799-0107-7**

© Кадымов В.А., 2018  
© МГГЭУ, 2018

# 1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

## 1.1. Область определения

**Определение 1.** Пусть задано множество  $G$  пар  $(x, y)$  числовых значений переменных  $x$  и  $y$  и задан закон  $f$ , по которому каждой паре  $(x; y)$  из множества  $G$  ставится в соответствие единственное значение функции  $z(x, y)$ . Тогда говорят, что задана *функция двух переменных*  $z = f(x, y)$ , которые называются *аргументами*, или *независимыми переменными*.

Множество  $G$  называется областью определения (существования) функции  $f(x, y)$ .

**Замечание.** Поскольку на плоскости  $хоу$  любой паре  $(x; y)$  соответствует точка  $M(x, y)$ , то вместо  $f(x, y)$  можно записать  $f(M)$ , а пару  $(x; y)$  называть точкой  $M(x, y)$ . Под областью определения функции  $z = f(x, y)$  будем понимать как множество  $G$ , так и соответствующее ему множество точек в плоскости  $хоу$ .

Если область определения специально не указана, то она находится из условия того, чтобы выражение  $f(x, y)$  имело смысл.

**Пример 1.**  $z = \ln(x + y)$ . Область определения этой функции находится из условия  $x + y > 0$  или  $y > -x$ , т.е.  $G$  — множество точек плоскости  $хоу$ , лежащих выше прямой  $y = -x$ .

**Выполните самостоятельно.** Изобразите области определения функций.

1.  $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$ .

2.  $z = \arcsin(x + y)$ .

3.  $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$ .

4.  $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$ .

**Определение 2.** Окрестностью  $U_r(M_0)$  точки  $M_0(x_0; y_0)$  радиуса  $r$  называется множество точек  $M(x; y)$ , лежащих внутри круга радиуса  $r$  с центром в  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$U_r(M_0) = \left\{ (x, y) : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r \right\}. \quad (1.1)$$

Введем понятие области как множества точек плоскости  $xy$  определенного класса (не путать с понятием области определения функции).

**Определение 3.** Областью  $D$  называется множество точек плоскости, характеризующееся следующими свойствами:

- 1) *свойство открытости*: если точка  $M \in D$ , то существует и некоторая окрестность этой точки, которая целиком содержится в  $D$ ;
- 2) *свойство связности*: любые две точки множества  $D$  можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в  $D$ .

Примером области может служить круг  $x^2 + y^2 < 1$ , не включающий в себя точки окружности  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Определение 4.** *Граничной точкой* области  $D$  называется точка, любая окрестность которой содержит как точки области  $D$ , так и точки, не принадлежащие  $D$ .

Границей  $\partial D$  области  $D$  называется множество всех ее граничных точек. Вследствие свойства открытости, все точки области  $D$  являются внутренними, т.е. не принадлежащими границе.

Объединение области  $D$  с  $\partial D$  называется *замкнутой областью*  $D$ .

Область называется *ограниченной*, если она целиком лежит внутри некоторого круга конечного радиуса. Примером замкнутой области может служить круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

Линия уровня функции двух переменных — это такое множество точек из ее области определения, в которых функция принимает одно и то же значение.

**Определение 5.** Линией уровня функции двух переменных  $z = f(x, y)$  называется плоская кривая, получаемая при пересечении графика этой функции плоскостью  $z = C$ , параллельной координатной плоскости  $xOy$ .

По взаимному расположению линий уровня (при различных значениях  $C$ ) можно получить представление о форме поверхности, описываемой функцией  $z = f(x, y)$ .

**Выполните самостоятельно.** Постройте линии уровня функций.

1.  $z = \frac{y}{x}$ .

2.  $z = x^2 - y^2$ .

3.  $z = x^2 + y^2$ .

## 1.2. Предел и непрерывность

**Определение 6.** Число  $A$  называется *пределом* функции  $z = f(x, y)$  в точке  $M_0(x_0; y_0)$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такой радиус  $r = r(\varepsilon) > 0$ , что для всякой точки  $M(x; y)$ , не совпадающей с  $M_0$  и находящейся в окрестности точки  $M_0$  радиуса  $r$ , т.е. при  $0 < |MM_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r(\varepsilon)$ , выполняется неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Записывается это так:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \text{ или } \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A. \quad (1.2)$$

Отметим, что для существования предела  $f(x, y)$  в точке  $M_0$  вовсе не требуется, чтобы функция была определена в этой точке. Подчеркнем также, что из самого определения предела следует, что если

он существует, то он единственный и не зависит от траектории, по которой точка  $M(x, y)$  стремится к точке  $M_0$ .

**Пример 2.** Найдите предел функции  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x}$ .

*Решение.*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0; \\ y \rightarrow 2 \\ \alpha \equiv xy \rightarrow 0}} \left( y \cdot \frac{\sin xy}{xy} \right) = \lim_{\substack{y \rightarrow 2 \\ \alpha \rightarrow 0}} \left( y \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \lim_{y \rightarrow 2} y = 1 \cdot 2 = 2.$$

Мы воспользовались первым замечательным пределом, а также теоремой о пределе произведения двух функций: предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если каждый из них существует.

**Пример 3.** Исследуйте вопрос существования предела функции

$$J = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 - xy + y^2}.$$

*Решение.* Этот предел удобнее исследовать в полярных координатах ( $x = \rho \cos \varphi$ ;  $y = \rho \sin \varphi$ ):

$$J = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ (\rho \neq 0)}} \frac{\rho^3 (\cos^2 \varphi \sin \varphi + \cos \varphi \sin^2 \varphi)}{\rho^2 (\cos^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho f_1(\varphi) = 0,$$

где  $f_1(\varphi)$  — ограниченная функция:

$$|f_1(\varphi)| = \frac{|\cos^2 \varphi \sin \varphi + \cos \varphi \sin^2 \varphi|}{|1 - (1/2) \sin 2\varphi|} \leq \frac{|\cos^2 \varphi \sin \varphi + \cos \varphi \sin^2 \varphi|}{1/2} \leq \frac{2}{1/2} = 4.$$

**Пример 4.** Исследуйте вопрос существования предела функции  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$  в точке  $M_0(0; 0)$ .

*Решение.* Учитывая, что в пределе  $x \neq x_0 \equiv 0$ ,  $y \neq y_0 \equiv 0$ , получаем:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 y}{x^2 [1 + (y/x)^2]} = \frac{y}{1 + (y/x)^2} \Rightarrow |f(x, y)| = \left| \frac{y}{1 + (y/x)^2} \right| \leq |y|$$

и, переходя к пределу в последнем неравенстве, устанавливаем, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Отметим, что данный предел проще исследовать в полярной системе координат ( $x = \rho \cos \varphi \rightarrow 0$ ;  $y = \rho \sin \varphi \rightarrow 0 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ ):

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 (\cos^2 \varphi \sin \varphi)}{\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho (\cos^2 \varphi \sin \varphi) = 0.$$

**Пример 5.** Исследуйте вопрос существования предела  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ .

*Решение.* Покажем, что этого предела не существует. Для этого достаточно взять два разных направления и показать, что они приводят к отличным друг от друга результатам:

$$\text{а) } y = x; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x}{x^4 + x^2} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 1} = 0;$$

$$\text{в) } y = x^2; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x \neq 0)}} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, указанного предела не существует.

Отсутствие предела можно показать также, используя полярные координаты. Действительно,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 (\cos^2 \varphi \sin \varphi)}{\rho^2 (\rho^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \left( \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{\rho^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi} \right).$$

Достаточно выбрать 2 направления и подтвердить, что последний предел приводит к различным значениям:

$$\text{а) } \begin{cases} \rho(\varphi) = \sin \varphi / \cos^2 \varphi \\ \varphi \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \\ = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{\frac{\sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } \begin{cases} \rho(\varphi) = \rho \rightarrow 0 \\ \varphi = \varphi_0 = \pi/4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \varphi = \pi/4}} \rho \frac{1/(2\sqrt{2})}{\rho^2 (1/4) + (1/2)} = 0.$$

Таким образом, подтвердили полученный выше результат.

**Определение 7.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена в некоторой окрестности точки  $M_0(x_0; y_0)$ , включая и саму эту точку. Если существует  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ , причем  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ , то  $f(x, y)$  называется *непрерывной* в точке  $M_0(x_0; y_0)$ .

Если точка  $M_0(x_0; y_0)$  лежит в области определения функции  $f(x, y)$  или на ее границе, причем в этой точке нарушается какое-либо из условий непрерывности, то  $M_0$  называется *точкой разрыва* функции  $f(x, y)$ .

**Пример 6.** Функция  $z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$  разрывна в точке  $M_0(0; 0)$ , поскольку эта точка принадлежит границе (и является границей) области определения,  $z$  причем  $z(x, y)$  в ней не определена. Более того, данная функция не имеет предела в указанной точке. Действительно, пусть  $M(x; y) \rightarrow M_0(0; 0)$  вдоль прямой  $y = kx$  ( $k = \text{const}$ ). Тогда вдоль этой прямой  $z = \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2} = \text{const}$  (при  $M \neq M_0$ ) и получается, что предел  $z(x, y)$  зависит от направления прямой  $y = kx$ , что противоречит определению предела (предел функции в точке определяется единственным образом).



**Выполните самостоятельно.** Дайте определение предела функции двух переменных в точке. Докажите, что функция  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  не имеет предела в точке  $(0; 0)$ .

## 2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

### 2.1. Частные производные

Пусть задана функция  $z = f(x, y)$ . Выберем точку  $M_0(x_0; y_0)$  внутри области определения  $f(x, y)$  и рассмотрим малое приращение  $\Delta x$  аргумента  $x = x_0 + \Delta x$ , оставив другой аргумент фиксированным и равным  $y_0$ . Тогда разность  $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$  называется *частным приращением* функции  $f(x, y)$  в точке  $M_0$ .

**Определение 8.** *Частной производной* функции  $z = f(x, y)$  по переменной  $x$ , обозначаемой  $f'_x(x_0, y_0)$  или  $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ , в точке  $M_0(x_0; y_0)$  называется предел

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

если он существует.

Аналогично вводятся частное приращение  $\Delta_y z$  и частная производная функции  $z$  по  $y$  в точке  $M_0$ , обозначаемая  $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$  или

$f'_y(x_0, y_0)$ :

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Поскольку  $f'_x$  и  $f'_y$  являются функциями точки  $M_0$ , и при этом точка  $M_0$ , может меняться, то индекс «ноль» у их аргументов будем опускать.

**Пример 7.** Пусть  $z = \frac{x^3}{y}$ . Тогда  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2}{y}$  (дифференцируем по  $x$ , считая  $y$  постоянным) и  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^3}{y^2}$  (дифференцируем по  $y$  при постоянном  $x$ ).

**Пример 8.** Найдите частные производные функции  $z = y \sin 2x$  в точке  $P_0\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ .

*Решение.* Имеем  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2y \cos 2x$  (дифференцируем по  $x$ , считая  $y$  постоянным) и  $\frac{\partial z}{\partial y} = \sin 2x$  (дифференцируем по  $y$  при постоянном  $x$ ). Подставим координаты точки  $P_0(\pi/2; 1)$ :  $z'_x(P_0) = -2$ ;  $z'_y(P_0) = 0$ .

**Выполните самостоятельно.** 1. Дайте определение частных производных функции  $f(x, y)$  в точке  $(x_0; y_0)$ . Найдите, исходя из определения, частные производные 1-го порядка функции  $f(x, y) = x^2y$  в точке  $M_0(1; 2)$ .

*Ответ:*  $f'_x(M_0) = 4$ ;  $f'_y(M_0) = 1$ ).

2. Найдите частные производные функции  $f(x, y) = x^2 + y^3$  в точке  $M_0(2; 3)$ .

*Ответ:*  $f'_x(M_0) = 4$ ;  $f'_y(M_0) = 27$ ).

## 2.2. Полный дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Пусть точка  $M_0(x_0; y_0)$  лежит внутри области определения функции  $z = f(x, y)$ . Рассмотрим малые приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  в точке  $M_0$ .

**Определение 9.** Полным приращением  $f(x, y)$  в точке  $M_0$  называется разность

$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \quad (2.1)$$

**Определение 10.** Функция  $z = f(x, y)$  называется дифференцируемой в точке  $M_0(x_0; y_0)$ , если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \quad (2.2)$$

при этом величины  $A$  и  $B$  зависят только от  $M_0$  и не зависят от  $\Delta x, \Delta y$ , а  $\alpha(\Delta x, \Delta y)$  при  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$  есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ :

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = o(\rho), \text{ т.е. } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho(\Delta x, \Delta y)} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Полным дифференциалом  $df$  (или  $dz$ ) указанной функции  $z = f(x, y)$  в точке  $M_0$  называется главная часть ее полного приращения, линейная относительно  $\Delta x$  и  $\Delta y$ :

$$dz(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y, \quad (2.3)$$

при этом  $dy = \Delta y$ ,  $dx = \Delta x$ .

С точностью до бесконечно малой высшего порядка  $\Delta z \approx dz$  при  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ .

**Теорема 1.** Если  $z = f(x, y)$  дифференцируема в точке  $M_0$ , то в этой точке существуют  $\frac{\partial f}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , причем  $\frac{\partial f}{\partial x} = A$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = B$ .

Обратное утверждение верно, если предположить непрерывность  $\frac{\partial f}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

**Теорема 2.** Если у функции  $z = f(x, y)$  частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$  непрерывны в окрестности точки  $M_0(x_0; y_0)$ , то  $f(x, y)$  дифференцируема в этой точке.

Итак, для дифференцируемой функции выполняется

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy,$$

$$\Delta z(M_0) = \Delta f(M_0) = df(M_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y), \quad (2.4)$$

где  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$ .

В дальнейшем вместо  $x_0, y_0$  будем писать  $x, y$ .

**Пример 9.** Найдите полный дифференциал функции  $z = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$ .

*Решение.*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x + y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{(x + y)};$$

$$dz = \frac{dx}{x + y} - \frac{xdy}{y(x + y)} = \frac{1}{x + y}(dx - xdy).$$

Заметим, что все понятия данного раздела легко обобщаются на случай трех и более переменных.

Как следует из (2.4), при достаточно малых  $\Delta x, \Delta y$  для дифференцируемой функции  $z = f(x, y)$  имеет место приближенное равенство  $\Delta z \approx dz$ .

**Пример 10.** Определите, как изменятся площадь и диагональ прямоугольника со сторонами 8 м и 6 м, если его большую сторону уменьшить на 1,2 см, а меньшую увеличить 1,4 см.

*Решение.*

1) Площадь прямоугольника и длина диагонали находятся по формулам  $S = a \times b$  и  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ , поэтому для решения задачи привлечем функции  $z = f(x, y) = xy$  и  $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , а также формулу приближенного вычисления

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

2) Полагаем  $x_0 = 8, y_0 = 6, \Delta x = -0,012, \Delta y = 0,014$ , тогда для площади прямоугольника изменение составляет

$$\Delta z \approx 6 \times (-0,012) + 8 \times (0,014) = 0,4;$$

диагональ прямоугольника изменится на величину

$$\begin{aligned} \Delta z &\approx \frac{8}{\sqrt{64+36}}(-0,012) + \frac{6}{\sqrt{64+36}}(0,014) = \\ &= -0,8 \times 0,012 + 0,6 \times 0,014 = -0,0012. \end{aligned}$$

**Пример 11.** Центральный угол кругового сектора пластины равен  $\varphi_0 = 80^\circ$ , а начальная длина его радиуса равна  $R_0 = 20$  см. Заказчик пожелал уменьшить угол на  $d\varphi = \varphi - \varphi_0 = -1^\circ$ . Насколько при этом надо увеличить радиус сектора, чтобы его площадь  $S(R, \varphi) = \frac{\pi R^2 \varphi}{360}$  оставить без изменения?

*Решение.* По условию, изменение площади сектора равно нулю:  
 $\Delta S = S(R_0 + dR, \varphi_0 + d\varphi) - S(R_0, \varphi_0) = 0.$

Если положить малыми изменения  $dR$  и  $d\varphi$   
 $(dR = o(R_0); d\varphi = o(\varphi_0))$ , то

$$\Delta S \approx dS(M_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial S(M_0)}{\partial R} dR + \frac{\partial S(M_0)}{\partial \varphi} d\varphi = 0,$$

откуда

$$dR = -\frac{\frac{\partial S(M_0)}{\partial \varphi} d\varphi}{\frac{\partial S(M_0)}{\partial R}} = \frac{\frac{\pi R_0^2}{360} \cdot 1}{\frac{\pi R_0}{180} \cdot 80} = \frac{1}{8} = 0.125(\text{см}).$$

**Пример 12.** Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно  $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$ .

*Решение.* Рассмотрим функцию  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  в точках  $M(x; y)$  и  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$x = 4,05; y = 2,93; x_0 = 4; y_0 = 3; \Delta x = x - x_0 = 0,05;$$

$$\Delta y = y - y_0 = -0,07;$$

$$z(M_0) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5;$$

$$z'_x(M) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow z'_x(M_0) = \frac{4}{5};$$

$$z'_y(M) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow z'_y(M_0) = \frac{3}{5}.$$

Тогда искомое выражение

$$\begin{aligned} \sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2} &\equiv z(M) \approx z(M_0) + z'_x(M) \Delta x + z'_y(M) \Delta y = \\ &= 5 + \frac{4}{5} \cdot 0,05 + \frac{3}{5} \cdot (-0,07) = 5,04 - 0,042 = 4,998. \end{aligned}$$

**Пример 13.** Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно  $0,97^{1,05}$ .

*Решение.* Рассмотрим функцию  $z = x^y$  в точках  $M(x; y)$  и  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$x = 0,97; y = 1,05; x_0 = 1; y_0 = 1; \Delta x = x - x_0 = -0,03;$$

$$\Delta y = y - y_0 = 0,05;$$

$$z(M_0) = 1;$$

$$z'_x(M) = yx^{y-1} \Rightarrow z'_x(M_0) = 1;$$

$$z'_y(M) = x^y \ln x \Rightarrow z'_y(M_0) = 0.$$

Тогда искомое выражение

$$\begin{aligned} 0,97^{1,05} &\equiv z(M) \approx z(M_0) + z'_x(M)\Delta x + z'_y(M)\Delta y = \\ &= 1 + 1 \cdot (-0,03) = 0,97. \end{aligned}$$

**Выполните самостоятельно.** 1. Найдите полный дифференциал функции  $z = e^{x^2+y^2}$ .

$$\text{Ответ: } dz = 2e^{x^2+y^2}(xdx + ydy).$$

2. Дайте определение дифференцируемости функции  $f(x, y)$  в точке  $(x_0; y_0)$ . Докажите, что если функция дифференцируема в точке  $(x_0; y_0)$ , то она непрерывна в этой точке.

3. На сколько изменится диагональ и площадь прямоугольника со сторонами  $x = 6$  м и  $y = 8$  м, если первая сторона увеличится на 2 мм, а вторая сторона уменьшится на 5 мм?

*Ответ:* диагональ уменьшится на 3 мм, а площадь уменьшится на  $140 \text{ см}^2$ .

4. На сколько приблизительно изменится сторона квадрата, если его площадь уменьшить с  $16 \text{ м}^2$  до  $15,82 \text{ м}^2$ ?

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно  $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$ .

*Ответ:* 2,95.

### 2.3. Частные производные высшего порядка. Формула Тейлора

Частными производными 2-го порядка функции  $z = f(x, y)$  называются частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y).$$

Если частные производные, подлежащие вычислению, непрерывны, то результат многократного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Дифференциалом 2-го порядка функции  $z = f(x, y)$  называется дифференциал от дифференциала 1-го порядка этой функции

$$d^2 z = d(dz).$$

Если  $z = f(x, y)$ , где  $x$  и  $y$  – независимые переменные, и функция  $f$  имеет непрерывные частные производные 2-го порядка, то дифференциал 2-го порядка функции  $z$  вычисляется по формуле:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

В общем случае, при наличии соответствующих производных, справедлива формула биномиального распределения:

$$d^n z = \left( dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^n z.$$

**Пример 14.** Найдите частные производные 2-го порядка от функции  $f(x, y) = x^2 y + y^3$ .



*Решение.* Последовательно вычисляем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Пусть функция двух переменных  $z = f(x, y)$  имеет в окрестности точки  $M_0(x_0; y_0)$  непрерывные частные производные всех порядков до  $(n + 1)$ -го порядка включительно. Тогда в рассматриваемой окрестности точки  $M_0$  справедлива *формула Тейлора*:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} [f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)] +$$

$$+ \frac{1}{2!} [f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2] +$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!} \left[ (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x_0, y_0) + R_n(x, y),$$

где  $R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[ (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1}$

$f[x_0 + \theta \cdot (x - x_0), y_0 + \theta \cdot (y - y_0)]$  — остаточный член формулы Тейлора в разложении функции в форме Лагранжа ( $0 < \theta < 1$ ).

Частный случай этой формулы при  $x_0 = y_0 = 0$  называется *формулой Маклорена*.

Аналогичные формулы имеют место для функции трех и большего числа независимых переменных.

**Пример 15.** Разложите функцию  $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $M_0(1; -2)$ .

*Решение.* Последовательно вычисляем частные производные:

$$f'_x = 4x - y - 6; \quad f'_y = -x - 2y - 3; \quad f''_{xx} = 4; \quad f''_{xy} = -1; \quad f''_{yy} = -2,$$

причем другие частные производные равны нулю. При этом,  $f(M_0) = 5$ ;  $f'_x(M_0) = 0$ ;  $f'_y(M_0) = 0$ .

Подстановка их в формулу Тейлора дает:

$$f(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2.$$

**Пример 16.** Разложите функцию  $f(x, y) = x^y$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $M(1; 1)$  с точностью до членов 2-го порядка малости сравнительно с  $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ .

*Решение.* Последовательно проводя вычисления, получаем:

$$f'_x = yx^{y-1}; f'_y = x^y \ln x; f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}; f''_{xy} = x^{y-1}; f''_{yy} = x^y (\ln x)^2.$$

В рассматриваемой точке соответственно:

$$f(M) = 1; f'_x(M) = 1; f'_y(M) = 0; f''_{xx}(M) = 0; f''_{xy}(M) = 1; f''_{yy}(M) = 0.$$

Искомое разложение принимает вид:

$$f(x, y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + o(\rho^2).$$

**Пример 17.** Разложите функцию  $u(M) \equiv u(x, y, z) = (5x - 4z) \arctg^2(y + 2z)$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $M_0(x_0 = 0; y_0 = -1; z_0 = 1)$  с точностью до членов 2-го порядка малости сравнительно с  $\rho = \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}$ .

*Решение.* Разложим функцию  $u(x, y, z) = (5x - 4z) \arctg^2(y + 2z)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $M_0$  и оставим первые 10 членов ряда:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) = u(M) = u(M_0) &+ \frac{1}{1!} [u'_x(M_0)(x-x_0) + u'_y(M_0)(y-y_0) + u'_z(M_0)(z-z_0)] + \\
&+ \frac{1}{2!} [u''_{xx}(M_0)(x-x_0)^2 + 2u''_{xy}(M_0)(x-x_0)(y-y_0) + 2u''_{xz}(M_0)(x-x_0)(z-z_0) + \\
&+ 2u''_{yz}(M_0)(y-y_0)(z-z_0) + u''_{yy}(M_0)(y-y_0)^2 + u''_{zz}(M_0)(z-z_0)^2] + R_n(x, y, z).
\end{aligned}$$

Остается найти все неизвестные коэффициенты, входящие в последнее разложение:

$$u(M_0) = (0-4) \operatorname{arctg}^2 1 = -\frac{\pi^2}{4};$$

$$u'_x(M) = 5 \operatorname{arctg}^2(y+2z) \Rightarrow u'_x(M_0) = 5 \operatorname{arctg}^2 1 = \frac{5\pi^2}{16};$$

$$u'_y(M) = \frac{5x-4z}{1+(y+2z)^2} \Rightarrow u'_y(M_0) = \frac{0-4}{1+1} = -2;$$

$$u'_z(M) = -4 \operatorname{arctg}^2(y+2z) + (5x-4z) 2 \operatorname{arctg}(y+2z) \frac{2}{1+(y+2z)^2};$$

$$u'_z(M_0) = -\frac{\pi^2}{4} - 2\pi;$$

$$u''_{xx}(M) = 5 \operatorname{arctg}^2(y+2z) \cdot 0 = 0 \Rightarrow u''_{xx}(M_0) = 0;$$

$$u''_{xy}(M) = 5 \operatorname{arctg}(y+2z) \cdot 1 \Rightarrow u''_{xy}(M_0) = 5 \operatorname{arctg} 1 = 5\pi/4;$$

$$u''_{xz}(M) = 10 \operatorname{arctg}(y+2z) \cdot \frac{2}{1+(y+2z)^2} \Rightarrow u''_{xz}(M_0) = \frac{20 \cdot (\pi/4)}{2} = 5\pi/2;$$

$$u''_{yy}(M) = -\frac{5x-4z}{[1+(y+2z)^2]^2} (y+2z) 2 \Rightarrow u''_{yy}(M_0) = -\frac{0-4}{2^2} 2 \cdot 1 = -2;$$

$$u''_{yz}(M) = \frac{-4[1+(y+2z)^2] - (5x-4z) 2(y+2z) 2}{[1+(y+2z)^2]^2} \Rightarrow u''_{yz}(M_0) = 2;$$

$$u''_{zz}(M) = \frac{-8 \operatorname{arctg}(y+2z) 2}{1+(y+2z)^2} + \frac{1}{1+(y+2z)^2} \left[ -8 \operatorname{arctg}(y+2z) + \frac{(5x-4z) 4}{1+(y+2z)^2} \right] -$$

$$-\frac{(5x-4z)2\operatorname{arctg}(y+2z)\cdot 2\cdot 2(y+2z)\cdot 2}{[1+(y+2z)^2]^2} \Rightarrow u''_{zz}(M_0) = -3\pi - 4 + 4\pi = \pi - 4.$$

**Выполните самостоятельно.** 1. Разложите функцию  $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $M_0(-2; 1)$ .

$$\text{Ответ: } f(x, y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2.$$

2. Разложите функцию  $f(x, y) = \sin x \cdot \ln y$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $M(0; 2)$  с точностью до членов 2-го порядка малости сравнительно с  $\rho = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$ .

$$\text{Ответ: } f(x, y) = x \ln 2 + 0.5x(y-2) + o(\rho^2).$$

### 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ И НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

#### 3.1. Производная по направлению и градиент функции

Пусть  $z = f(x, y)$  — дифференцируемая функция двух независимых переменных  $x$  и  $y$ , которые, в свою очередь, являются функциями независимой переменной  $t$  (т.е. определяют кривую на плоскости в параметрическом виде):  $x = \varphi(t)$ ;  $y = \psi(t)$ . Тогда производная сложной функции  $z = f(\varphi(t), \psi(t))$  вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{d\psi}{dt}. \quad (3.1)$$

В частности, если  $t$  совпадает с одной из независимых переменных ( $t \equiv x$ ), то есть кривая на плоскости задана в явном виде  $y = y(x)$ , то формула (3.1) упрощается:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Если  $z = f(x, y)$  — дифференцируемая функция двух независимых переменных  $x$  и  $y$ , которые, в свою очередь, являются функциями двух независимых переменных

$$x = \varphi(u, v); y = \psi(u, v),$$

то частные производные  $z$  по  $u$  и  $v$  преобразуются по следующим формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (3.2)$$

**Пример 18.** Найдите производную  $\frac{dz}{dx}$  сложной функции  $z = u^v; u = \sin^2 x; v = \cos 3x$ .

*Решение.*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx} = (vu^{v-1})(2 \sin x \cos x) + (u^v \ln u)(-3 \cos 3x).$$

**Определение 11.** Производной функции  $z = f(x, y)$  в данном направлении  $\vec{l} = M\vec{N}$  называется

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{M \rightarrow N} \frac{|f(M) - f(N)|}{MN}, \quad (3.3)$$

где  $f(M)$  и  $f(N)$  — значения функции в точках  $M$  и  $N$ . Нетрудно показать, что для дифференцируемой функции  $z$  формула (3.3) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha,$$

где  $\cos \alpha$  и  $\sin \alpha$  — направляющие косинусы вектора  $\vec{l}$

$$\left( \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} \right).$$

Аналогично определяется производная по направлению  $\vec{l}$  для функции трех переменных  $u = f(x, y, z)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (3.4)$$

где  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  — направляющие косинусы вектора  $\vec{l}$ .

**Определение 12.** Градиентом функции  $z = f(x, y)$  называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные данной функции:

$$\text{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}.$$

Согласно (3.4), производная функции в направлении  $\vec{l}$  связана с градиентом функции формулой

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \text{grad} z \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = |\text{grad} z| \cdot \cos \varphi$$

( $\varphi$  — угол между векторами  $\text{grad} z$  и  $\vec{l}$ ),

то есть производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направление дифференцирования.

Градиент функции в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции. С другой стороны, направление градиента функции в данной точке задает направление наибольшей скорости возрастания функции в данной точке, причем

$$\left( \frac{\partial z}{\partial l} \right)_{\text{наиб}} = |\text{grad} z|.$$

**Пример 19.** Найдите производную функции  $f(x, y) = \ln(5x^2 + 2y^2)$  в точке  $M(1, -3)$  по направлению, составляющему угол  $\frac{\pi}{3}$  с осью  $ox$ .

*Решение.* По условию,  $\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \cos \frac{\pi}{3} \vec{i} + \sin \frac{\pi}{3} \vec{j} = \frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j}$ . Находим частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{10x}{5x^2 + 2y^2}$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{14y}{5x^2 + 2y^2}$ .

Подставим координаты точки:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x} = \frac{10}{23}; \quad \frac{\partial f(M)}{\partial y} = \frac{-12}{23}.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial l} = \frac{10}{23} \cdot \frac{1}{2} + \left( -\frac{12}{23} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5 - 6\sqrt{3}}{23}.$$

**Пример 20.** Температурное поле в листе металла распределено по закону  $T = x \sin \pi y$ . Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры в точке  $M_0(1;1)$  и соответствующее направление наибольшего возрастания температуры.

*Решение.* Скорость изменения температуры в точке  $M_0$  достигает наибольшего значения, равного  $\frac{\partial T(M_0)}{\partial l} \Big|_{\max} = |\text{grad}T(M_0)|$ , в направлении  $\vec{l}$ , совпадающем с направлением вектора  $\text{grad}T(M_0)$ :  $\text{grad}T = \sin \pi y \vec{i} + \pi x \cos \pi y \vec{j}$ ;  $\text{grad}T(M_0) = (0; -\pi)$ ;  $|\text{grad}T(M_0)| = \pi$ .

**Выполните самостоятельно.** 1. Как связаны производная по направлению и градиент дифференцируемой функции  $f(x, y)$ ? Чему равна производная по направлению, перпендикулярному градиенту?

2. Найдите производную функции  $u = x + \ln(z^2 + y^2)$  в точке  $A(2;1;1)$  по направлению  $\overline{AB}$ , где  $B(0;2;0)$ .

Ответ:  $-\sqrt{6}/3$ .

### 3.2. Дифференцирование неявных функций

Пусть в неявном виде задана дифференцируемая функция переменных  $x$  и  $y$ , определяющая  $y$  как функцию от  $x$ :

$$f(x, y) = 0. \quad (3.5)$$

Тогда, для производной имеет место формула:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}. \quad (3.6)$$

**Пример 21.** Найдите в точке  $x = 1$  первую производную функции, заданной в неявном виде:

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0. \quad (3.7)$$

*Решение.* Введем обозначение  $f(x, y) \equiv x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2$ . Тогда,

$$f'_x = 2x - 2y + 1, \quad f'_y = -2x + 2y + 1.$$

Подставляя  $x = 1$  в (3.7), получаем два значения  $y_1 = 0$ ;  $y_2 = 1$  для ординаты точек, определяемых неявной функцией (3.7). По формуле (3.6) получаем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 2y + 1}{-2x + 2y + 1},$$

и соответственно имеем два значения для производной:



$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = 3; \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -1.$$

**Пример 22.** Найдите производную  $y'(x)$  функции  $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ .

*Решение.* Представим два способа решения.

Запишем данную функцию в виде сложной функции двух переменных:

$$y = u^v, \text{ где } u = \sin x; v = \operatorname{tg} x.$$

Тогда, согласно формуле (3.1), получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dx} = v u^{v-1} \cos x + u^v \ln u \frac{1}{\cos^2 x} = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \left(1 + \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}\right).$$

Второй способ основан на методе предварительного логарифмирования исходной (неэлементарной) функции показательного-степенного вида:

$$\ln y = \operatorname{tg} x \ln \sin x.$$

Дифференцируя обе части последнего равенства и считая функцию  $y = y(x)$  известной, получаем:

$$\frac{1}{y} y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x + \operatorname{tg} x \frac{\cos x}{\sin x} = 1 + \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}.$$

Подставим в последнее соотношение исходную функцию, получаем искомую производную:

$$y'(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \left(1 + \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}\right).$$

Аналогично, если  $F(x, y, z) = 0$  определяет  $z$  как функцию двух переменных  $x$  и  $y$ , причем  $F(x, y, z)$  — дифференцируемая функция

переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$ , и кроме того,  $F'_z(x, y, z) \neq 0$ , то частные производные этой неявно заданной функции могут быть найдены по следующим формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (3.8)$$

**Пример 23.** Найдите частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  функции  $z = f(x, y)$ , заданной неявно уравнением  $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$ .

*Решение.* Находим частные производные функции  $F(x, y, z) = z^3 - 4xz + y^2 - 4$ :

$$F'_x = -4z; \quad F'_y = 2y; \quad F'_z = 3z^2 - 4x.$$

Подставляя их в (3.8), получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4z}{3z^2 - 4x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{3z^2 - 4x}.$$

Считаем полезным указать другой способ. Дифференцируя исходное уравнение (записывая в дифференциалах), получаем:

$$3z^2 dz - 4z dx - 4x dz + 2y dy = 0,$$

откуда находим

$$dz = \frac{4z}{3z^2 - 4x} dx - \frac{2y}{3z^2 - 4x} dy.$$

Сравнивая последнее с формулой для дифференциала функции

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

получаем искомые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4z}{3z^2 - 4x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{3z^2 - 4x}.$$

**Выполните самостоятельно.** 1. Найдите частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  функции  $z = f(x, y)$ , заданной неявно уравнением

$$z - x = y \operatorname{ctg}(z - x), \text{ в точке } M_0 \left( \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{Ответ: } z'_x(M_0) = 1; z'_y(M_0) = 2/(2 + \pi).$$

### 3.3. Замена переменных в выражениях, содержащих частные производные

Известно множество математических моделей, представленных дифференциальными уравнениями в частных производных и описывающих то или иное явление, либо физический процесс. При этом как исходные уравнения описываемой задачи, так и их решения остаются инвариантными относительно выбора системы координат, в которой проводят вычисление. И в зависимости от исследуемой задачи и ее условий приходится выбирать подходящую систему независимых переменных. При замене переменных в дифференциальных выражениях входящие в них производные следует выразить через производные по новым переменным, используя приведенное выше правило дифференцирования сложных функций. Ниже рассмотрены некоторые из распространенных на практике примеров таких задач.

**Пример 24.** Преобразуйте уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (a \neq 0)$$

к новым независимым переменным  $\alpha$  и  $\beta$ , так что  $\alpha = x - at$ ;  $\beta = x + at$ .

*Решение.* Применяя формулы (3.2) дифференцирования сложной функции, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} (-a) + \frac{\partial u}{\partial \beta} a = a \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial \beta} \cdot 1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}.\end{aligned}$$

Применяя повторно дифференцирование и используя те же формулы, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \frac{\partial \beta}{\partial t} = \\ &= a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \right) (-a) + a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \right) a = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \beta}{\partial x} = \\ &= a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \cdot 1 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) \cdot 1 = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}.\end{aligned}$$

Подставив полученные зависимости для  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  в исходное уравнение, получим:

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right),$$

откуда следует искомое дифференциальное уравнение в новых переменных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

**Пример 25.** Преобразуйте уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

к полярным координатам  $r$  и  $\varphi$ , положив  $x = r \cos \varphi$ ;  $y = r \sin \varphi$ .

*Решение.* Найдем сначала обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctg g\left(\frac{y}{x}\right), \end{cases}$$

откуда получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi; & \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi; & \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r} \end{cases}.$$

Подставим их в формулы (3.2) преобразования частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Повторно применяя формулы (3.2), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) u = \\ &= \cos^2 \varphi \cdot u''_{rr} - \frac{2}{r} \cos \varphi \sin \varphi \cdot u''_{r\varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \cdot u''_{\varphi\varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \cdot u'_r + \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \cdot u'_\varphi; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) u = \end{aligned}$$

$$= \sin^2 \varphi \cdot u''_{rr} + \frac{2}{r} \cos \varphi \sin \varphi \cdot u''_{r\varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \cdot u''_{\varphi\varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \cdot u'_r - \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \cdot u'_\varphi.$$

Подставив их в исходное дифференциальное уравнение, получим уравнение Лапласа в полярных координатах:

$$u''_{xx} + u''_{yy} = u''_{rr} + \frac{1}{r^2} \cdot u''_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} \cdot u'_r = 0.$$

**Пример 26.** Покажите, что функция  $z(x, y) = e^{xy}$  является частным решением дифференциального уравнения

$$x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} = 0.$$

Преобразуйте это уравнение, приняв за новые независимые переменные

$$u = 1 - x - y; v = 2 + x + 2y.$$

*Решение.* Находим частные производные:

$$\begin{aligned} z'_x &= e^{xy} y; z''_{xx} = ye^{xy} y = y^2 e^{xy}; \\ z'_y &= e^{xy} x; z''_{yy} = x^2 e^{xy}. \end{aligned}$$

Подставим в исходное уравнение:

$$x^2 (y^2 e^{xy}) - y^2 (x^2 e^{xy}) = 0,$$

в результате получаем тождество, подтверждающее, что  $z = e^{xy}$  удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению.

Без труда находим обратное преобразование:

$$x = -2u - v + 4; y = u + v - 3.$$

Преобразуем теперь частные производные, воспользовавшись формулой (3.2):

$$\begin{aligned}
z'_x &= z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = -z'_u + z'_v; \\
z'_y &= z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = -z'_u + 2z'_v; \\
&= z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}; \\
z''_{yy} &= (z'_y)'_y = (-z'_u + 2z'_v)'_u \cdot u'_y + (-z'_u + 2z'_v)'_v \cdot v'_y = \\
&= (-z''_{uu} + 2z''_{vu}) \cdot (-1) + (-z''_{uv} + 2z''_{vv}) \cdot 2 = z''_{uu} - 4z''_{uv} + 4z''_{vv}.
\end{aligned}$$

Подставим теперь в исходное дифференциальное уравнение:

$$(-2u - v + 4)^2 (z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}) - (u + v - 3)^2 (z''_{uu} - 4z''_{uv} + 4z''_{vv}) = 0$$

и получаем конечный вид исходного дифференциального уравнения в новых переменных:

$$A(u, v) \cdot z''_{uu} + 2B(u, v) \cdot z''_{uv} + C(u, v) \cdot z''_{vv} = 0,$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
A &\equiv (-2u - v + 4)^2 - (u + v - 3)^2; & B &\equiv -(-2u - v + 4)^2 + 2(u + v - 3)^2; \\
C &\equiv (-2u - v + 4)^2 - 4(u + v - 3)^2.
\end{aligned}$$

## 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

### 4.1. Дифференциальные операторы

Напомним, что *вектор-градиент* функции  $U(x, y, z)$

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \equiv \nabla U \quad (4.1)$$

был рассмотрен ранее. Градиент функции направлен по нормали поверхности (линии) уровня  $U(x, y, z) = C$  в точке  $M$  в сторону возрастания функции  $U(x, y, z)$  и по величине (длине) равен наибольшей скорости изменения  $U(x, y, z)$  в точке  $M$ :

$$|\operatorname{grad}U(M)| = \max_l \frac{\partial U}{\partial l}.$$

**Определение 13.** Дивергенцией векторного поля  $\vec{v}(M) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$  называется скаляр следующего вида:

$$\operatorname{div} \vec{v}(M) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v}. \quad (4.2)$$

Вихрем векторного поля  $\vec{a}(M) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  называется вектор

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (4.3)$$

Векторное поле  $\vec{a}(M)$  называется *потенциальным*, если существует скалярная функция  $U = f(x, y, z)$  (называемая потенциалом поля) такая, что

$$\vec{a}(x, y, z) = \operatorname{grad}U. \quad (4.4)$$

Для потенциальности поля  $\vec{a}(x, y, z)$ , определенного в односвязной области, необходимо и достаточно, чтобы оно было *безвихревым*, т.е.  $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$ . В таком случае существует потенциал  $U(x, y, z)$ , определяемый из уравнения

$$dU = a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Векторное поле называется *соленоидальным*, если в каждой точке поля выполняется условие  $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ . Если поле  $\vec{a}(M)$  является одно-



временно потенциальным и соленоидальным, то  $\operatorname{div}(\operatorname{grad}U)=0$  и потенциал функции  $U$  является гармонической функцией, т.е.  $U(x, y, z)$  удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta U(x, y, z) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

где  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — дифференциальный оператор Лапласа.

**Пример 27.** Определите градиент функции  $z(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$  в точке  $M(2; 4)$ .

*Решение.* Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x \Rightarrow \frac{\partial z(M)}{\partial x} = 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{3}y \Rightarrow \frac{\partial z(M)}{\partial y} = \frac{2}{3}.$$

Значит,

$$\operatorname{grad}z(M) = 2\vec{i} + \frac{8}{3}\vec{j}.$$

Уравнение линии уровня, проходящей через данную точку, имеет вид:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = \frac{22}{3}.$$

**Пример 28.** Вычислите дивергенцию и вихрь вектора  $\vec{a}(x, y, z) \equiv \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

*Решение.* По условию, координаты вектора  $\vec{a}$  имеют вид  $a_x = x$ ;  $a_y = y$ ;  $a_z = z$ .

Следовательно,

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3;$$

$$\text{rot} \vec{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0},$$

так как  $x, y, z$  — не зависимые между собой переменные.

## 4.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

**Определение 14.** Касательной плоскостью к поверхности

$$F(x, y, z) = 0 \quad (4.5)$$

в точке  $M$  (точке касания) называется плоскость, в которой расположены все касательные прямые к линиям на поверхности, проходящим через данную ее точку.

*Нормалью* к поверхности в точке касания  $M$  называется прямая, проведенная через данную точку перпендикулярно у касательной плоскости.

Заметим, что в особых точках поверхности (т.е. точках, в которых все три частных производные  $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$  равны нулю или хотя бы одна из них не существует) касательная плоскость может не существовать.

Если уравнение гладкой поверхности задано в виде (4.5), то уравнение касательной плоскости в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  имеет вид

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0, \quad (4.6)$$

где  $\vec{n} = F'_x(M_0)\vec{i} + F'_y(M_0)\vec{j} + F'_z(M_0)\vec{k}$  — вектор нормали к поверхности в точке  $M_0$ ;

соответственно, уравнение нормали к поверхности (4.5) в точке  $M_0$  будет:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (4.7)$$

**Пример 29.** Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = \frac{x^2}{2} - y^2$  в ее точке  $M_0(2; -1; 1)$ .

*Решение.* Примем, что  $F(x, y, z) = z - \frac{x^2}{2} + y^2$ . Тогда,

$$F'_x = -x; F'_y = 2y; F'_z = 1 \Rightarrow F'_x(M_0) = -2; F'_y(M_0) = -2; F'_z(M_0) = 1.$$

Уравнения касательной плоскости и нормали соответственно принимают вид:

$$\begin{aligned} -2(x-2) - 2(y+1) + (z-1) &= 0 \Rightarrow 2x + 2y - z - 1 = 0; \\ \frac{x-2}{-2} &= \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}. \end{aligned}$$

**Пример 30.** На поверхности  $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$  найдите точки, в которых касательная плоскость параллельна координатной плоскости  $xOz$ .

*Решение.* Найдем направление вектора нормали к исходной поверхности:

$$F'_x = 2x - 2; F'_y = 2y; F'_z = -2z.$$

С другой стороны, нормаль к координатной плоскости  $xOz$  (или, что то же, вектор, направленный вдоль оси  $Oy$ ) имеет вид  $\vec{n} = (0; 1; 0)$ .

Решая совместно уравнение поверхности, и условие коллинеарности вектора нормали к поверхности в произвольной точке  $M(x; y; z)$  и направляющего вектора оси  $Oy$ , находим искомые точки на поверхности:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0 \\ 2x - 2 = \lambda \cdot 0 = 0 \\ 2y = \lambda \cdot 1 = \lambda \\ 2z = \lambda \cdot 0 = 0 \end{cases},$$

откуда получаем, что  $x = 1; z = 0$ . Подставим их в уравнение поверхности:

$$y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1.$$

Таким образом, нашли на заданной поверхности точки  $M_1(1; 1; 0)$  и  $M_2(1; -1; 0)$ , в которых касательная плоскость параллельна координатной плоскости  $xOz$ .

Отметим, что приведенные выше дифференциальные операторы находят широкое применение в интегральном исчислении функции многих переменных и его приложениях, а также в курсе уравнений в частных производных и математической физики.

**Выполните самостоятельно.** 1. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности  $e^x - z + xy = 3$  в точке  $M(2; 1; 0)$ .

$$\text{Ответ: } x + 2y = 4; \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}.$$

2. Составьте уравнение плоскости, касательной к поверхности  $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 21$ , параллельной плоскости  $6x - 4y - z = 0$ .

$$\text{Ответ: } 6x - 4y - z = \pm 21.$$

3. К поверхности  $xy + xz + z^2 = 1$  проведите касательную плоскость, параллельную плоскости  $x - y + 2z = 0$ . Укажите соответствующую точку на поверхности. Составьте также уравнение нормали к поверхности в найденной точке.

$$\text{Ответ: } M_0\left(-2/\sqrt{5}; -1/\sqrt{5}; 3/\sqrt{5}\right); x - y + 2z - \sqrt{5} = 0;$$

$$\frac{\sqrt{5}x + 2}{3} = \frac{\sqrt{5}y + 1}{-2} = \frac{\sqrt{5}z - 3}{4}.$$

## 5. ЛОКАЛЬНЫЙ И ГЛОБАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМЫ

### 5.1. Локальный экстремум

**Определение 15.** Говорят, что функция  $f(x, y)$  имеет *максимум* (*минимум*) в точке  $M_0(x_0; y_0)$ , если для всех отличных от  $M_0$  точек  $M(x, y)$  в достаточно малой окрестности точки  $M_0$  выполнено неравенство  $f(x_0, y_0) > f(x, y)$  (или соответственно  $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ ). Максимум или минимум функции называется ее *экстремумом*. Иначе говоря, функция имеет экстремум в данной точке, если эта функция имеет максимум или минимум в данной точке.

**Теорема 3 (необходимое условие экстремума).** Если функция  $z = f(x, y)$  достигает экстремума в точке  $M_0(x_0; y_0)$ , то каждая из частных  $\frac{\partial f}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$  или обращается в нуль при этих значениях аргументов, или хотя бы одна из них не существует.

Такие точки возможного экстремума  $M_0(x_0; y_0)$  называют *критическими*.

**Пример 31.** Рассмотрим две функции:  $f_1(x, y) = (x-1)^2(y+2)^4 + 5$  и  $f_2(x, y) = (x-1)^3(y+2)^4 + 5$ . Точка  $M_0(1; -2)$  является критической для обеих функций, однако при этом первая функция достигает минимума в точке  $M_0$ , а для второй функции  $M_0$  не является точкой экстремума.

**Теорема 4 (достаточное условие экстремума).** Пусть функция  $z = f(x, y)$  в некоторой окрестности точки  $M_0(x_0; y_0)$  имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Предположим еще, что  $M_0(x_0; y_0)$  является критической (стационарной) точкой для функции  $f(x, y)$ , т.е.  $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ . Введем для удобства обозначения:  $A = f''_{xx}(M_0)$ ;  $B = f''_{xy}(M_0)$ ;  $C = f''_{yy}(M_0)$ ;  $\Delta = AC - B^2$ .

Тогда в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

- 1)  $f(x, y)$  имеет максимум, если  $\Delta > 0$  и  $A < 0$  (или  $C < 0$ );
- 2)  $f(x, y)$  имеет минимум, если  $\Delta > 0$  и  $A > 0$  (или  $C > 0$ );
- 3)  $f(x, y)$  не имеет ни максимума, ни минимума, если  $\Delta < 0$ ;
- 4) если  $\Delta = 0$ , то вопрос наличия экстремума остается открытым (в этом случае требуется дальнейшее исследование).

**Пример 32.** Найдите локальный экстремум функции двух аргументов

$$z = x^3 + y^3 - 9xy.$$

*Решение.*

1) Найдем частные производные:  $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 9y$ .

2) Найдем критические точки, т.е. точки, в которых частные производные обращаются в нуль.

$$\begin{cases} 3x^2 - 9y = 0, \\ 3y^2 - 9x = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 3. \end{cases}$$

3) Найдем вторые частные производные  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -9$ ;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$ , а затем их значения в критических точках:  $A_1 = 0$ ,  $B_1 = -9$ ,

$C_1 = 0$  и  $A_2 = 18$ ,  $B_2 = -9$ ,  $C_2 = 18$ .

а)  $\Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = -81 < 0$  и, следовательно, в точке  $M_1(0; 0)$  экстремума нет;

б)  $\Delta_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = 324 - 81 > 0$  и, следовательно, в точке  $M_2(3; 3)$  есть экстремум. Поскольку в этом случае  $A_2 = 18 > 0$ , точка  $M_2(3, 3)$  является точкой локального минимума.

**Пример 33.** Найдите локальный экстремум функции двух переменных

$$z = 3x^2y - x^3 - y^4.$$

*Решение.* Находим точки возможного экстремума из решения системы:

$$\begin{cases} z'_x \equiv 6xy - 3x^2 = 3x(2y - x) = 0 \\ z'_y \equiv 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}, \text{ или}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0, \\ x = 2y \Rightarrow 4y^2(3 - y) = 0 \Rightarrow y_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 6. \end{cases}$$

Итак, нашли 2 точки возможного экстремума:  $M_1(0;0)$  и  $M_2(6;3)$ .  
Проверяем достаточные условия существования экстремума:

$$A \equiv z''_{xx} = 6y - 6x; C \equiv z''_{yy} = -12y^2; B \equiv z''_{xy} = 6x.$$

Для точки  $M_1(0;0)$  получаем:  $A_1 = 0; C_1 = 0; B_1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 0$ . То есть, в точке  $M_1$  требуется провести дополнительное исследование:

$$z(M_1) = 0;$$

$$\text{При } x < 0; y = 0 \Rightarrow z(x, y) = -x^3 > 0;$$

$$\text{а при } x = 0; y \neq 0 \Rightarrow z(x, y) = -y^4 < 0.$$

Итак, в окрестности точки  $M_1(0;0)$  функция  $z = z(x, y)$  принимает как значения, большие  $z(M_1)$ , так и меньшие  $z(M_1)$ . Следовательно, в точке  $M_1(0;0)$  функция  $z(x, y)$  не достигает экстремума.

$$\text{В точке } M_2(6;3) \text{ имеем: } A_2 = -18 < 0; C_2 = -108 < 0; B_2 = 36 \Rightarrow \Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = 108 \cdot 18 - 36^2 > 0.$$

Значит,  $M_2$  — точка максимума, причем  $z_{\max} = z(M_2) = 27$ .

Переходим к нахождению экстремумов функций трех (и более) переменных.

Ищем сначала точки возможного экстремума (критические точки)  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ . Для дифференцируемой функции  $u = f(x, y, z)$  это сводится к условию:

$$df(M_0) \equiv f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy + f'_z(M_0)dz = 0. \quad (5.1)$$

Вопрос наличия в точке  $M_0$  экстремума определяется знаком приращения функции в малой окрестности этой точки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta f(M_0) = df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2f(M_0) + o(\rho^2), \\ \rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \equiv \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \end{array} \right., \quad (5.2)$$

Из (5.2) следует, что

$$\Delta f(M_0) = \begin{cases} < 0, d^2f(M_0) < 0 \Rightarrow M_0 - \max \\ > 0, d^2f(M_0) > 0 \Rightarrow M_0 - \min \end{cases}.$$

Дифференциал второго порядка дифференцируемой функции  $u = f(x, y, z)$  в точке  $M_0$  представляет собой квадратичную форму

$$\begin{aligned} d^2f(M_0) &= (dx, dy, dz) \begin{pmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) & f''_{xz}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) & f''_{yz}(M_0) \\ f''_{zx}(M_0) & f''_{zy}(M_0) & f''_{zz}(M_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \\ &= f''_{xx}(M_0)dx^2 + 2f''_{xy}(M_0)dxdy + 2f''_{xz}(M_0)dx dz + 2f''_{yz}(M_0)dy dz + \\ &\quad + f''_{yy}(M_0)dy^2 + f''_{zz}(M_0)dz^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$



Квадратичная форма  $d^2 f(M_0)$  называется *положительно определенной* (или *знакоположительной*), если для любого направления  $\vec{l} = (dx, dy, dz)$  в точке  $M_0$  выполняется неравенство  $d^2 f(M_0) > 0$ .

Матрицу  $f_{ij} \equiv f_{x_i x_j}''(M_0), (x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z)$  в формуле (5.3) называют *матрицей Гессе*, а миноры, примыкающие к левому верхнему углу этой матрицы, — *угловыми*.

Имеет место *критерий Сильвестра*. Для того чтобы квадратичная форма  $d^2 f(M_0)$  с матрицей  $f_{ij}(M_0)$  была *положительно (отрицательно) определенной*, необходимо и достаточно, чтобы для угловых миноров матрицы  $f_{ij}(M_0)$

$$\Delta_1 = f_{xx}''(M_0); \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx}''(M_0) & f_{xy}''(M_0) \\ f_{yx}''(M_0) & f_{yy}''(M_0) \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{xx}''(M_0) & f_{xy}''(M_0) & f_{xz}''(M_0) \\ f_{yx}''(M_0) & f_{yy}''(M_0) & f_{yz}''(M_0) \\ f_{zx}''(M_0) & f_{zy}''(M_0) & f_{zz}''(M_0) \end{vmatrix}$$

выполнялись условия:

- 1) если все угловые миноры положительны, то квадратичная форма будет положительно определенной (т.е. в критической точке  $M_0$  функция  $u = f(x, y, z)$  достигает минимума);
- 2) если миноры  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  чередуют знаки, начиная с отрицательного, то квадратичная форма будет отрицательно определенной (т.е. в критической точке  $M_0$  функция  $u = f(x, y, z)$  достигает максимума).

**Пример 34.** Исследуйте на локальный экстремум функцию трех переменных

$$u = f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

*Решение.* Находим точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 12y = 0 \\ f'_y = 2y + 12x = 0 \\ f'_z = 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1(x_2 = 24; y_2 = -144; z_2 = -1), \\ M_2(x_1 = 0; y_1 = 0; z_1 = -1) \end{cases}.$$

Вычисляем вторые производные:

$$f_{xx}'' = 6x; f_{xy}'' = 12; f_{xz}'' = 0; f_{yy}'' = 2; f_{yz}'' = 0; f_{zz}'' = 2.$$

Определяем матрицу Гессе и угловые миноры в указанных точках:

$$1) M_1: f_{ij}(M_1) = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \Delta_1 = 144 > 0; \Delta_2 = 144 > 0; \Delta_3 = 288 > 0.$$

Следовательно,  $M_1$  — точка минимума.

$$2) M_2: f_{ij}(M_2) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \Delta_1 = 0; \Delta_2 = -144; \Delta_3 = -288.$$

В точке  $M_2$  условия критерия Сильвестра не выполняются, а значит, требуется дополнительное исследование. Можно показать, что в точке  $M_2$  функция не достигает экстремума (эти рассуждения мы опускаем).

**Выполните самостоятельно.** 1. Найдите локальные экстремумы функции  $z(x, y) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ .

*Ответ:*  $(0; 3)$  — max.

2. Исследуйте на локальные экстремумы функцию  $u(x, y) = x^2 - 4xy + 8y^3$ .

*Ответ:*  $(0; 0)$  — нет экстремума;  $(2/3; 1/3)$  — min.

3. Найдите локальные экстремумы функции  $u(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$ .

*Ответ:*  $(3; 2)$  — min;  $(-3; -2)$  — max.

## 5.2. Условный экстремум

Во многих задачах на отыскание наибольших и наименьших значений функции вопрос сводится к нахождению максимумов и минимумов функции от нескольких переменных, которые не являются независимыми, а связаны между собой некоторыми дополнительными условиями (например, они должны удовлетворять заданным уравнениям).

В качестве примера рассмотрим следующую задачу:

Из данного куска жести площадью  $2a$  нужно сделать закрытую коробку в форме параллелепипеда, имеющую наибольший объем.

Если обозначить длину, ширину и высоту коробки через  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то задача сводится к нахождению максимума функции

$$u = xyz \quad (5.1)$$

при условии, что

$$2xy + 2xz + 2yz = 2a. \quad (5.2)$$

Здесь мы имеем задачу на условный экстремум функции (5.1), при котором переменные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  связаны дополнительным условием (5.2). Ниже мы представим метод решения таких задач.

Требуется найти максимумы и минимумы функции

$$u = f(x, y) \quad (5.3)$$

при условии, что переменные  $x$  и  $y$  связаны уравнением

$$\varphi(x, y) = 0. \quad (5.4)$$

При наличии условия (5.4) из двух переменных  $x$  и  $y$  независимым будет только одно, например  $x$ , так как  $y$  определяется из равенства (5.4) как функция от  $x$ . Если разрешим уравнение (5.4) относительно  $y$ , то получим функцию одной переменной  $x$  и сведем задачу к задаче об исследовании на экстремум функции одной независимой переменной  $x$ .

Но можно решить поставленную задачу, не разрешая уравнение (5.4) относительно  $x$  или  $y$ . Чтобы найти условный экстремум

функции  $f(x, y)$  при наличии условия (5.4), поступают следующим образом.

1. Составляют так называемую функцию Лагранжа

$$L(x, y, t) = f(x, y) + t \cdot \varphi(x, y), \quad (5.5)$$

где  $t$  — неопределенный постоянный множитель. Необходимые условия экстремума сводятся к системе трех уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + t \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} + t \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t} \equiv \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

с тремя неизвестными  $x, y, t$ , из которой определяются точки возможного экстремума  $M_0(x_0; y_0)$  и значения для множителя Лагранжа  $t$ .

Понятно, что наличие экстремума в точке возможного экстремума  $M_0$  определяется знаком приращения

$$\Delta f(M_0) = df(M_0) + \frac{1}{2}d^2f(M_0) + o(\rho^2), \quad \rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

2. Далее можем продолжить исследование двумя путями.

2а. Найдем знак определителя  $\tilde{\Delta}(M_0) = L''_{xx}L''_{yy} - L''_{xy}{}^2$ , куда подставлено соответствующее значение множителя Лагранжа  $t = t_0$ ;

$$\tilde{\Delta}(M_0) = \begin{cases} > 0, \text{ точка экстр.} \\ < 0, \text{ экстр. нет.} \end{cases}$$

А именно, если  $L''_{xx}(M_0) > 0$ , то функция достигает минимума в точке  $M_0$ ;

если  $L''_{xx}(M_0) < 0$ , то функция достигает максимума в точке  $M_0$ .

2б. Составим в каждой точке возможного экстремума квадратичную форму  $d^2L(M_0) = -\frac{dx^2}{\phi_y'^2} |\tilde{H}|$ , где  $|\tilde{H}|$  — окаймленный гессиан матрицы

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & \phi'_x & \phi'_y \\ \phi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \phi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{pmatrix};$$

если при этом  $|\tilde{H}(M_0)| > 0 \Rightarrow d^2L(M_0) < 0$ , то  $M_0$  — точка максимума;  
 если  $|\tilde{H}(M_0)| < 0 \Rightarrow d^2L(M_0) > 0$ , то  $M_0$  — точка минимума;  
 если  $|\tilde{H}(M_0)| = 0$ , то необходимо продолжить исследование, воспользовавшись другим способом.

Отметим, что указанный способ нахождения условного экстремума имеет место и в случае функций трех переменных.

**Пример 35.** Найдите условный экстремум функции  $z = xy$  при условии, что  $x$  и  $y$  связаны уравнением  $5x + 2y - 20 = 0$ .

*Решение.* Выразим из дополнительного условия  $y$  через  $x$ :

$$y = \frac{20 - 5x}{2} = -\frac{5}{2}(x - 4),$$

и подставим в функцию  $z = xy$ :

$$z(x, y(x)) = -\frac{5}{2}x(x - 4).$$

Найдем точку возможного экстремума:

$$z'(x) = -\frac{5}{2}(2x - 4) = -5(x - 2) = 0 \Rightarrow x_0 = 2.$$

Находим вторую производную:

$$z''(x) = -5 < 0.$$

Следовательно,  $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = \frac{-5}{2}(x_0 - 4) = 5$ ; и  $M_0(2; 5)$  — точка условного максимума функции  $z = xy$ , причем  $z_{\max} = 10$ .

**Пример 36.** Найдите экстремум функции  $z = 6 - 4x - 3y$  при условии, что переменные  $x$  и  $y$  удовлетворяют уравнению  $x^2 + y^2 = 1$ .

*Решение.* Поясним геометрический смысл задачи: требуется найти наибольшее и наименьшее значения аппликаты  $z$  в плоскости для точек пересечения ее с цилиндром  $x^2 + y^2 = 1$ .

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, t) = 6 - 4x - 3y + t(x^2 + y^2 - 1).$$

Найдем  $\frac{\partial L}{\partial x} = -4 + 2tx$ ;  $\frac{\partial L}{\partial y} = -3 + 2ty$ . Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} -4 + 2tx = 0 \\ -3 + 2ty = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Последняя система дает две точки возможного экстремума:

$$t_1 = \frac{5}{2}; x_1 = \frac{4}{5}; y_1 = \frac{3}{5}$$

и

$$t_2 = -\frac{5}{2}; x_2 = -\frac{4}{5}; y_2 = -\frac{3}{5}.$$

Найдем вторые производные:

$$A = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2t; B = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0; C = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2t.$$

Следовательно,  $\Delta = AC - B^2 > 0$  в каждой из точек возможного экстремума. При этом в первой точке  $A_1 = 5 > 0$ , значит,  $M_1\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$  — точка минимума, и  $z_{\min} = 6 - 4x_1 - 3y_1 = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1$ . Во второй точке  $A_2 = -5 < 0$ . то есть  $M_2\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$  — точка максимума, и  $z_{\max} = 6 - 4x_1 - 3y_1 = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11$ .

Подтвердим этот факт вторым способом, с помощью гессиана.

$$1) M_1\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) \Rightarrow \tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 8/5 & 6/5 \\ 8/5 & 5 & 0 \\ 6/5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\tilde{H}| < 0 \text{ — точка минимума;}$$

$$2) M_2\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & -8/5 & -6/5 \\ -8/5 & -5 & 0 \\ -6/5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\tilde{H}| > 0 \text{ — точка}$$

максимума.

**Пример 37.** Исследуйте на экстремум функцию  $z = 5xy - 4$  при условии, что переменные  $x$  и  $y$  положительны и удовлетворяют уравнению  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$ .

*Решение.* Составим функцию Лагранжа и найдем ее стационарные точки:

$$L(x, y, t) = 5xy - 4 + t\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right);$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 5y + \frac{tx}{4} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 5x + ty = 0 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \\ x > 0; y > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = -5xy \\ x = 2y \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \\ x > 0; y > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ x = 2 \\ t = -10 \end{array} \right. .$$

Установим характер экстремума в найденной точке возможного экстремума  $M_0(2;1)$ , исходя из знака  $d^2L(M_0)$ :

$$L''_{xx} = t/4; L''_{xy} = 5; L''_{yy} = t;$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \Rightarrow d\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{4}dx + ydy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{xdx}{4y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L''_{xx}(M_0) = -5/2; L''_{xy} = 5; L''_{yy} = -10 \\ dy = -\frac{xdx}{4y} \end{array} \right. ;$$

$$d^2L(M_0) = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2 = -10dx^2 < 0.$$

Следовательно,  $M_0(2;1)$  — точка условного максимума, причем  $z_{\max} = 10 - 4 = 6$ .

**Пример 38.** Найдите экстремум функции  $u = 2x + y - z + 1$  при условии, что переменные  $x$ ,  $y$  и  $z$  удовлетворяют уравнению связи  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 22$ .

*Решение.* Составим функцию Лагранжа и найдем ее стационарные точки:

$$L(x, y, z, t) = u(x, y, z) + tf(x, y, z) = 2x + y - z + 1 + t(x^2 + y^2 + 2z^2 - 22);$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L'_x = 2 + 2tx = 0 \\ L'_y = 1 + 2ty = 0 \\ L'_z = -1 + 4tz = 0 \\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 22 \end{array} \right. .$$



В результате получим 2 точки:

$$M_1(4; 2; -1) \text{ при } t_1 = -1/4; \quad M_2(-4; -2; 1) \text{ при } t_2 = 1/4.$$

Составим окаймленную матрицу Гессе:

$$f'_x = 2x; f'_y = 2y; f'_z = 4z;$$

$$L''_{xx} = 2t; L''_{xy} = 0; L''_{xz} = 0; L''_{yy} = 2t; L''_{yz} = 0; L''_{zz} = 4t;$$

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y & 4z \\ 2x & 2t & 0 & 0 \\ 2y & 0 & 2t & 0 \\ 4z & 0 & 0 & 4t \end{pmatrix}.$$

Определим знаки угловых миноров  $H_{2m+1}, H_{2m+2}, \dots, H_{m+n}$  матрицы  $\tilde{H}$  ( $m=1$  — количество условий связи;  $n=3$  — число независимых переменных). Так как  $2m+1=3$  и  $m+n=4$ , то достаточно найти  $H_3$  и  $H_4 \equiv |\tilde{H}|$ :

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2t & 0 \\ 2y & 0 & 2t \end{vmatrix} = -8t(x^2 + y^2);$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 4z \\ 2x & 2t & 0 & 0 \\ 2y & 0 & 2t & 0 \\ 4z & 0 & 0 & 4t \end{vmatrix} = -32t^2(x^2 + y^2 + 2z^2);$$

$$H_3(M_1) = 40; H_4(M_1) = -44; H_3(M_2) = -40; H_4(M_2) = -44.$$

Знаки  $H_3(M_1)$  и  $H_4(M_1)$  чередуются, причем знак  $H_3(M_1)$  совпадает со знаком  $(-1)^{m+1} = (-1)^2 = 1$ , поэтому  $M_1$  — точка условного максимума,  $u_{\max} = 12$ .

Миноры  $H_3(M_2)$  и  $H_4(M_2)$  одного знака, совпадающего со знаком  $(-1)^m = -1$ , поэтому  $M_2$  — точка условного минимума,  $u_{\min} = -10$ .

**Пример 39.** Найдите кратчайшее расстояние от точки  $O(0;0)$  до кривой

$$\varphi(x, y) \equiv x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0. \quad (5.7)$$

*Решение.* Заметим, что кривая  $\varphi(x, y) = 0$  симметрична относительно начала координат. Из чего следует, что задача имеет соответственно два решения. Пусть  $M(x; y)$  — произвольная точка на кривой (5.7). Тогда расстояние от точки  $M$  до точки  $O$  равно

$$\rho(x; y) = OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В результате приходим к следующей задаче об условном экстремуме функции  $\rho(x; y)$  при условии (5.7). Однако для упрощения вычислений вместо  $\rho(x; y)$  возьмем  $\rho^2(x; y)$  и составим для последней функции лагранжиан:

$$L(x, y, t) = \rho^2(x, y) + t \cdot \varphi(x, y) = (x^2 + y^2) + t(x^2 + 8xy + 7y^2 - 225),$$

который позволит определить искомую точку на кривой (5.7), в которой достигается наименьшее значение функции  $\rho = \rho(x, y)$ . Находим точки возможного экстремума из решения следующей системы:

$$\begin{cases} L'_x \equiv 2x + t(2x + 8y) = 0 \\ L'_y \equiv 2y + t(8x + 14y) = 0 \\ L'_t \equiv x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Из первых двух уравнений системы, исключив неизвестный параметр  $t$ , находим подстановки:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+4y}{4x+7y} \Rightarrow \frac{x}{y} \equiv k \Rightarrow 2k^2 + 3k - 2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Итак, нашли 2 подстановки для определения точек возможного экстремума.

$$1) \frac{x}{y} = -2 \Rightarrow x = -2y.$$

Подставим последнее в третье уравнение системы (5.8), в результате получаем:

$$4y^2 - 16y^2 + 7y^2 - 225 = 0 \Rightarrow 5y^2 + 225 = 0.$$

Последнее уравнение не имеет решений в классе действительных чисел.

$$2) \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2x.$$

Подставим в последнее уравнение системы (5.8):

$$x^2 + 16x^2 + 28x^2 - 225 = 0 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}.$$

Следовательно, получаем 2 точки возможного экстремума:

$$M_1(x_1 = \sqrt{5}; y_1 = 2\sqrt{5}); t_1 = -\frac{x_1}{x_1 + 4y_1} = -\frac{1}{9};$$

$$M_2(x_2 = -\sqrt{5}; y_2 = -2\sqrt{5}); t_2 = -\frac{x_2}{x_2 + 4y_2} = -\frac{1}{9}.$$

Применим теперь достаточные условия существования условного экстремума. Для этого находим вторые частные производные:

$$A \equiv L''_{xx} = 2 + 2t; C \equiv L''_{yy} = 2 + 13t; B \equiv L''_{xy} = 8t.$$

1) Для точки  $M_1$  получаем:  $A_1 = 2 + 2\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{9} > 0$ ;  $C_1 = \frac{4}{9} > 0$ ;

$B_1 = -\frac{8}{9}$ ;  $\Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = 0$ , т.е. исследование нужно продолжить другим способом.

Определим знак второго дифференциала от лагранжиана:

$$\begin{aligned}d^2L(M_1) &= L''_{xx}(M_1)dx^2 + 2L''_{xy}(M_1)dxdy + L''_{yy}(M_1)dy^2 = \\ &= \frac{4}{9}(4dx^2 - 4dxdy + dy^2).\end{aligned}$$

Из условия (5.7) находим связь между дифференциалами  $dx$  и  $dy$  в исследуемой точке  $M_1$ :

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) = 0 &\Rightarrow \varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0 \Rightarrow (2x_1 + 8y_1)dx + (8x_1 + 14y_1)dy = \\ &= 0 \Rightarrow dx = -2dy.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$d^2L(M_1) = \frac{4}{9}(dx)^2 \left[ 4 - 4\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] = \frac{25}{9}(dx)^2 > 0 \text{ при}$$

$(dx)^2 + (dy)^2 \neq 0$ , то есть  $M_1$  — точка условного минимума функции  $\rho(x, y)$ .

2) Переходим к исследованию точки  $M_2$  на условный экстремум. Проводя выкладки, аналогичные предыдущему случаю, находим такую же зависимость между дифференциалами  $dx$  и  $dy$ , а также второй дифференциал  $d^2L(M_2)$  в точке  $M_2$ :

$dx = -2dy \Rightarrow d^2L(M_2) > 0$ , то есть  $M_2$  — также будет точкой условного минимума функции  $\rho(x, y)$ .

Запишем ответ: кратчайшее расстояние от точки  $O(0; 0)$  до кривой (5.7) равно

$$\rho_{\min} = \rho(M_1) = \rho(M_2) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 5$$

и достигает в двух точках  $M_1$  и  $M_2$ , лежащих на кривой (5.7).

Приведем другой способ решения задачи, основанный на применении гессиана ( $n = 2; m = 1; H_{2m+1} = H_3 \equiv \tilde{H}$ ):

$$|\tilde{H}(M_1)| = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 18\sqrt{5} & 36\sqrt{5} \\ 18\sqrt{5} & 16/9 & -8/9 \\ 36\sqrt{5} & -8/9 & 4/9 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow d^2L(M_1) > 0 \text{ —}$$

минимум;

$$|\tilde{H}(M_2)| = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -18\sqrt{5} & -36\sqrt{5} \\ -18\sqrt{5} & -16/9 & -8/9 \\ -36\sqrt{5} & -8/9 & 4/9 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow d^2L(M_2) > 0 \text{ —}$$

минимум.

**Пример 40.** Найдите кратчайшее расстояние от точки  $A(0;3;3)$  до точки пересечения двух поверхностей

$$\varphi_1(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \quad (5.9)$$

$$\varphi_2(x, y, z) \equiv x + y + z - 1 = 0. \quad (5.10)$$

*Решение.* Пусть  $M(x; y; z)$  — произвольная точка на линии пересечения поверхностей (5.9) и (5.10). Тогда расстояние от точки  $M$  до точки  $A$  равно

$$\rho(x; y; z) = AM = \sqrt{x^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2}.$$

Однако, как и в предыдущей задаче, вместо  $\rho(x; y; z)$  выберем  $\rho_0(x; y; z) = \rho^2(x; y; z)$ . Выразим переменную  $z$  из (5.10) через  $x, y$  и тем самым уменьшим число независимых переменных и количество уравнений связей на единицу:

$$z = 1 - x - y \Rightarrow \rho(x; y; z(x, y)) = \sqrt{x^2 + (y-3)^2 + (x+y+2)^2}.$$

В результате приходим к задаче об условном экстремуме функции двух переменных, для которой составляем лагранжиан:

$$L(x, y, t) = \left[ x^2 + (y-3)^2 + (x+y+2)^2 \right] + t(x^2 + y^2 + xy - x - y).$$

Найдем точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} L'_x \equiv 2x + 2(x+y+2) + t(2x+y-1) = 0 \\ L'_y \equiv 2(y-3) + 2(x+y+2) + t(x+2y-1) = 0. \\ L'_t \equiv x^2 + y^2 + xy - x - y = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Из первых двух уравнений системы, исключая неизвестный параметр  $t$ , найдем подстановку:

$$\frac{4x + 2y + 4}{2x + 4y - 2} = \frac{2x + y - 1}{x + 2y - 1} \Rightarrow x = -2y + 1.$$

Подставим ее в третье уравнение системы (5.11):

$$(-2y+1)^2 + y^2 + (-2y+1)y - (-2y+1) - y = 0 \Rightarrow y(3y-2) = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

Получаем две точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; z_1 = 0 \\ y_2 = 2/3 \Rightarrow x_2 = -1/3; z_2 = 2/3 \end{cases}, \text{ или}$$

$$M_1(x_1 = 1; y_1 = 0; z_1 = 0); t_1 = -\frac{4x_1 + 2y_1 + 4}{2x_1 + y_1 - 1} = -8;$$

$$M_2(x_2 = -1/3; y_2 = 2/3; z_2 = 2/3); t_2 = -\frac{4x_2 + 2y_2 + 4}{2x_2 + y_2 - 1} = 4.$$

Переходим к достаточным условиям существования экстремума, для этого находим вторые частные производные:

$$A \equiv L''_{xx} = 4 + 2t; C \equiv L''_{yy} = 4 + 2t; B \equiv L''_{xy} = 2 + t.$$

1) Точка  $M_1$ :  $A_1 = 4 - 16 = -12 < 0$ ;  $C_1 = -12 < 0$ ;  $B_1 = -6$ ;

$\Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = 144 - 36 > 0$ , т.е.  $M_1$  — точка условного максимума.

2) Точка  $M_2$ :  $A_2 = 4 + 8 = 12 > 0$ ;  $C_2 = 12 > 0$ ;  $B_2 = 6$ ;

$\Delta_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = 144 - 36 > 0$ , т.е.  $M_2$  — точка условного минимума, совпадающая с точкой пересечения поверхностей (5.9) и (5.10) и наиболее близко расположенная к заданной точке  $A(0; 3; 3)$ . Это расстояние равно

$$\begin{aligned} \rho_{\min} = AM &= \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 3)^2 + (z_2 - 3)^2} = \\ &= \sqrt{(-1/9)^2 + (2/3 - 3)^2 + (2/3 - 3)^2} = \sqrt{11}. \end{aligned}$$

Отметим, что не составляет труда решить эту задачу с помощью окаймленного гессиана — данный вопрос предлагаем в качестве самостоятельной работы.

**Выполните самостоятельно.** 1. Найдите точку локального минимума функции  $z = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 2$ .

2. Используя один из известных методов, найдите условные локальные экстремумы функции  $z = x^2 y$ , если известно, что  $x$  и  $y$  связаны уравнением  $x + y - 2 = 0$ .

*Ответ:*  $M_1(1; 1), M_2(-1; -1)$  — точки максимума;  
 $M_3(1; -1)$  — точка минимума.

3. Найдите локальные условные экстремумы функции  $z = x^2 + y^2 + xy$  при условии  $x^2 + y^2 - 2 = 0$ .

*Ответ:*  $M_1(1; 1); M_2(-1; -1)$  — точки максимума;  
 $M_3(-1; 1); M_4(1; -1)$  — точки минимума.

4. Найдите наиболее удаленную от начала координат точку кривой, по которой пересекаются две поверхности:  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  (конус) и  $x - 2z - 3 = 0$  (плоскость).

*Ответ:* наименьшее расстояние  $\sqrt{2}$  — до точки  $A(1; 0; -1)$ ;  
 $\lambda_1 = -1/3; \lambda_2 = -4/3$ ;

наибольшее расстояние  $3\sqrt{2}$  — до точки  $B(-3; 0; -3)$ ;  $\lambda_1 = -3$ ;  
 $\lambda_2 = -12$ .

### 5.3. Глобальный экстремум

Функция, дифференцируемая в ограниченной замкнутой области, достигает своего наибольшего и наименьшего значений (глобального экстремума) либо в стационарной точке, либо в точке границы области.

**Пример 41.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = xy(4 - x - y)$  в треугольнике OAB, ограниченном прямыми  $x = 0, y = 0, x + y = 8$ .

*Решение.*

1) Найдем критические точки, лежащие внутри данного треугольника. Имеем:

$$z'_x = 4y - 2xy - y^2 = y(4 - 2x - y), \quad z'_y = 4x - x^2 - 2xy = x(4 - 2y - x).$$

Приравниваем обе частные производные к нулю, в результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} y(4 - 2x - y) = 0, \\ x(4 - 2y - x) = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что внутри треугольника  $x > 0, y > 0$ , приходим к системе

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x + 2y = 4, \end{cases}$$



откуда  $x = \frac{4}{3}, y = \frac{4}{3}$ . Полученная критическая точка  $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$  лежит внутри треугольника. Находим значение функции в этой точке:

$$z = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \left(4 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27}.$$

2) Граница области состоит из трех участков:  $[AO]: y = 0$ ;  $[OB]: x = 0$  и  $[AB]: x + y = 8$ .

На участках  $[AO]; [OB]$  значения функции  $z = xy(4 - x - y)$  равны нулю. На участке  $[AB]$ , где  $y = 8 - x$  и  $0 \leq x \leq 8$  функция  $z = xy(4 - x - y)$  превращается в функцию одной переменной  $z = 4x(x - 8)$ . Найдем критические точки этой функции на отрезке  $[0, 8]$ :  $z'_x = 4(2x - 8) = 0$ , откуда  $x = 4$ . Вычислим значения функции  $z = 4x(x - 8)$  на концах отрезка  $[0, 8]$  и в точке  $x = 4$ :  $z(0) = 0$ ,  $z(4) = -64$ ,  $z(8) = 0$ .

3) Ищем наибольшее и наименьшее значения функции  $z$  среди следующих ее значений:  $z = \frac{64}{27}$  в точке  $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ ;  $z = 0$  на прямых  $x = 0, y = 0$ ;  $z = -64$  в точке  $(4, 4)$ . В результате

$$z_{\text{наим}} = z(4, 4) = -64; \quad z_{\text{наиб}} = z\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27}.$$

**Пример 42.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $y = x^2, y = 4$ .

*Решение.*

Найдем критические точки, лежащие внутри данной области:

$$\begin{cases} z'_x = 6x^2 + 8x - 2y = 0 \\ z'_y = 2y - 2x = 0. \end{cases}$$

В результате получаем 2 стационарные точки  $M_1(0;0)$  и  $M_2(-1;-1)$ , из которых ни одна не лежит внутри заданной области.

Ищем наибольшее и наименьшее значения функции  $z$  на границе. Граница состоит из двух частей:

$$1) I_1 = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2; y = x^2\} \Rightarrow z = z(x, y(x)) = x^4 + 4x^2$$

или

$$z' = 4x^3 + 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z(0) = 0.$$

Сравнивая значения  $z(0) = 0$ ,  $z(-2) = 32$  и  $z(2) = 32$ , заключаем, что на  $I_1$  наибольшее значение  $z(\pm 2) = 32$  и наименьшее значение  $z(0) = 0$ .

$$2) I_2 = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2; y = 4\} \Rightarrow z = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$$

или

$$z' = 6x^2 + 8x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2/3 \\ x_2 = -2, \end{cases} \text{ из которых только одна } (x_1 = 2/3)$$

принадлежит отрезку  $[-2; 2]$ , причем  $z(2/3) = 16\frac{22}{27}$ ;  $z(\pm 2) = 32$ .

Сопоставляя наибольшее и наименьшее значения функции на двух участках границы, а также учитывая, что внутри рассматриваемой области функция не имеет стационарных точек, заключаем, что наибольшее и наименьшее значения функции равны соответственно  $z_{\text{наиб}} = z(x = \pm 2; y = 4) = 32$  и  $z_{\text{наим}} = z(x = 0; y = 0) = 0$ .

**Выполните самостоятельно.** 1. Найдите наименьшее значение функции  $f(x, y) = |x - 1| + 2y^2 - 3$ .

2. Определите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^3 + y^3 - 3xy$  в области  $0 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 2$ .

*Ответ:* наибольшее значение  $z = 13$  функция принимает в точке  $M_1(2; -1)$ , наименьшее значение  $z = -1$  функция принимает в двух точках:  $M_2(1; 1)$  и  $M_3(0; -1)$ .

## 6. РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ЗАДАЧИ. РАЗБОР ВАРИАНТА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ

Этот раздел содержит решения типового варианта расчетно-графического задания. Каждый вариант заданий включает шесть задач.

В первом задании требуется найти частные производные и дифференциал функции двух переменных  $z = f(x, y)$  в указанной точке  $M_0(x_0; y_0)$ . Алгоритм решения рассмотрен в разделах 2.1 и 2.2 на примерах 8 и 9.

Приведем другой пример типового задания.

**Пример 46.** Найдите частные производные и дифференциал функции  $z = \operatorname{arctg}(xy)$  в точке  $M_0(1; 1)$ .

*Решение.*

$$z'_x = \frac{y}{1+(xy)^2} \Rightarrow z'_x(M_0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2};$$

$$z'_y = \frac{x}{1+(xy)^2} \Rightarrow z'_y(M_0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2};$$

$$dz(M_0) = z'_x(M_0)dx + z'_y(M_0)dy = \frac{1}{2}(dx + dy).$$

Во втором задании нужно приближенно вычислить выражения с помощью дифференциала, заменяя приращение функции дифференциалом. Алгоритм решения рассмотрен в разделе 3.1 на примерах 10–13.

В третьем задании требуется найти производную функции в точке по заданному направлению. Алгоритм решения см. в разделе 3.1 на примерах 19, 20.

В четвертом задании требуется построить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $F(x; y; z) = 0$ . Примеры решения таких задач можно найти в разделе 4.2 (примеры 29 и 30).

В пятом задании исследуется функция на наличие точек экстремума. Алгоритм решения представлен примерами 32–34 в разделе 5.1.

В последнем, шестом, задании требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции в области. Алгоритм решения подробно рассмотрен на примере 41 раздела 5.3.

Приведем еще один пример.

**Пример 47.** Найдите наибольшее значение функции  $z = 1 - x + x^2 + 2y$  в треугольнике  $OAB$ , ограниченном прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$ . При этом  $O(0; 0)$ ,  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 1)$ .

*Решение.*

1) Найдем стационарные точки, лежащие внутри данного треугольника. Имеем:

$$z'_x = -1 + 2x, \quad z'_y = 2 \neq 0,$$

откуда следует, что стационарных точек в рассматриваемой области нет.

Граница области состоит из трех участков:

$$[AO]: \left\{ (x; y) \left| \begin{array}{l} y = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \right\}, [OB]: \left\{ (x; y) \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right. \right\}, [AB]: \left\{ (x; y) \left| \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \right\}.$$

2) На участке  $[AO]$ :

$z = 1 - x + x^2 \Rightarrow z' = -1 + 2x = 0$ . Следовательно, искомая стационарная точка  $M_1(1/2; 0)$ . Отмечаем значения функции в стационарной точке  $M_1$  и на концах отрезка  $AO$ :

$$z(M_1) = 3/4, \quad z(O) = 1, \quad z(A) = 1.$$

3) На участке  $[BO]$ :

$z = 1 + 2y \Rightarrow z' = 2 \neq 0$ , значит, стационарных точек на границе  $BO$  нет. Отмечаем значения функции на концах отрезка  $BO$ :

$$z(B) = 3, z(O) = 1.$$

4) На участке  $[AB]$ :

$z = 3 - 3x + x^2 \Rightarrow z' = -3 + 2x = 0 \Rightarrow x = 3/2 \notin [0; 1]$ , то есть стационарных точек на границе  $AB$  нет. Отмечаем значения функции на концах отрезка  $AB$ :

$$z(B) = 3, z(A) = 1.$$

Сравнивая все отмеченные значения функции  $z$ , заключаем, что  $z_{\max} = z(B) = 3$  и достигается в граничной точке  $B(0; 1)$ .

## 7. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1.** Найдите частные производные и полный дифференциал функции двух переменных  $z = f(x, y)$  в заданной точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

- 1)  $z = \sin^2(xy); M_0(1; \pi/4)$ ;
- 2)  $z = yx^y; M_0(2; 1)$ ;
- 3)  $z = \ln(x^2 + y^2); M_0(-1; 1)$ ;
- 4)  $z = x \cos(y^2 + x); M_0(\pi/4; 0)$ ;
- 5)  $z = 2^{x^3y}; M_0(1; 2)$ ;
- 6)  $z = \frac{xy^2}{x^2 + 1}; M_0(1; 1)$ ;
- 7)  $z = \frac{x^2 - y}{x + y}; M_0(1; 0)$ ;
- 8)  $z = \sin(x/y); M_0(\pi/6; 1)$ ;
- 9)  $z = \sqrt{x^2 + xy + 3y^2}; M_0(1; -1)$ ;

- 10)  $z = \frac{\ln(xy)}{x+y}; M_0(1; 1);$
- 11)  $z = (x^2 + 3x)^{y^3+2y}; M_0(1; -1);$
- 12)  $z = y^2 \sin(x^2 y); M_0(\sqrt{\pi}; 1);$
- 13)  $z = x^2 \ln(x + y^2); M_0(2; 1);$
- 14)  $z = \ln x \sin(xy); M_0(1; \pi/6);$
- 15)  $z = \operatorname{tg}(y/x); M_0(2; \pi/2);$
- 16)  $z = \sin^2 x \cos^3 y; M_0(\pi/4; \pi/4).$

**Задание 2.** Вычислите заданное выражение с помощью дифференциала:

1.  $\cos 44^\circ \sin 92^\circ;$
2.  $\sqrt{(4,05)^2 + (2,98)^2};$
3.  $\sin 32^\circ \cos 59^\circ;$
4.  $(1,02)^5 (0,97)^3;$
5.  $\cos 59^\circ \sin 44^\circ;$
6.  $\cos 61^\circ \operatorname{tg} 46^\circ;$
7.  $(1,98)^4 (2,03)^5;$
8.  $\sin 59^\circ \sin 32^\circ;$
9.  $\sqrt{(3,02)^2 + (3,98)^2};$
10.  $\sin 32^\circ \oplus \operatorname{ctg} 47^\circ;$
11.  $\sqrt{(2,97)^2 + (3,98)^2};$
12.  $\cos 32^\circ \operatorname{ctg} 44^\circ;$
13.  $(2,05)^5 (2,98)^3;$
14.  $\sin 28^\circ \cos 58^\circ;$
15.  $(3,02)^4 (1,98)^5;$

16.  $\operatorname{tg} 44^\circ \cos 58^\circ$ .

**Задание 3.** Градиент функции и производная по направлению.

1) Найдите производную функции  $f(x, y) = 4x^4 - 3xy + 3y^2$  в точке  $M(2; -1)$  по направлению, составляющему угол  $\pi/3$  с осью  $ox$ .

2) Найдите производную функции  $f(x, y) = 5x^3 + 2xy - 3y^2$  в точке  $M(-2; 2)$  по направлению вектора  $\vec{a}(1; 4)$ .

3) Найдите производную функции  $f(x, y) = \cos 3x + 4 \sin 2y$  в точке  $M(\pi/2; \pi/2)$  по направлению вектора  $\vec{a}(2, -3)$ .

4) Найдите производную функции  $f(x, y) = 4 \cos 5x - 2 \sin 2y$  в точке  $M(\pi/2; \pi/2)$  по направлению, составляющему угол  $\frac{\pi}{3}$  с осью  $ox$ .

5) Найдите производную функции  $f(x, y) = 6x^2 - xy^3 + 4y$  в точке  $M(1; -2)$  по направлению, составляющему угол  $\pi/3$  с осью  $ox$ .

6) Найдите производную функции  $f(x, y) = \ln(3x^2 + 5y^2)$  в точке  $M(-3; 2)$  по направлению вектора  $\vec{a}(4; -1)$ .

7) Найдите производную функции  $f(x, y) = \ln(5x^2 + 2y^2)$  в точке  $M(1; -3)$  по направлению, составляющему угол  $\pi/3$  с осью  $ox$ .

8) Найдите направление наибольшей скорости возрастания функции  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  в точке  $M(2; 1)$ , а также величину наибольшей скорости.

9) Найдите направление наибольшей скорости возрастания функции  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$  в точке  $M(5; 3)$ , а также величину наибольшей скорости.

10) Найдите направление наибольшей скорости возрастания функции  $f(x, y) = xy$  в точке  $M(1; 2)$ , а также величину наибольшей скорости.

11) Найдите производную функции  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  в точке  $M(1;1)$  в направлении биссектрисы первого координатного угла.

12–16) Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону  $T = T(x, y)$ . Для примеров 12–16 найдите наибольшее значение скорости изменения температуры в точке  $M_0(1;1)$  и соответствующее направление наибольшего возрастания температуры:

12)  $T(x, y) = 6x^2 - 5y$ ;

13)  $T(x, y) = x \sin \pi y$ ;

14)  $T(x, y) = x^2 + 2xy$ ;

15)  $T(x, y) = y^2 - 2xy$ ;

16)  $T(x, y) = 2x^2 - y^3$ .

*Указание.* Скорость изменения температуры в точке  $M_0$  достигает наибольшего значения, равного  $\left. \frac{\partial T(M_0)}{\partial l} \right|_{\max} = |\text{grad}T(M_0)|$ , в направлении  $\vec{l}$ , совпадающем с направлением вектора  $\text{grad}T(M_0)$ .

**Задание 4.** Составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности  $F(x, y, z) = 0$  в указанной точке:

1)  $z = \ln(x^2 + y^2), M_0(1;0;0)$ ;

2)  $e^z - z + xy = 3, M_0(2;1;0)$ ;

3)  $x^2 - y^2 - z^2 = 1, M_0(3;2;2)$ ;

4)  $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y, M_0(1;1;1)$ ;

5)  $z = \frac{x^2}{2} - y^2, M_0(2;1;1)$ ;

6)  $x(y+z)(z-xy) = 8, M_0(2;1;3)$ ;

7)  $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5, M_0(1;1;2)$ ;

8)  $x^2 + y^2 + z^2 = 14, M_0(1;2;3)$ ;

9)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}, M_0(-3;4;5)$ ;



10)  $z = x^2 + y^2, M_0(1;1;2);$

11)  $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 12}, M_0(3;2;5).$

12–16) Составьте уравнение плоскости, касательной к поверхности  $F(x, y, z) = 0$  и параллельной заданной плоскости ( $\pi$ ):

12)  $F(x, y, z) \equiv 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 21, \pi: 6x - 4y - z = 0;$

13)  $F(x, y, z) \equiv xy + z^2 + xz - 1, \pi: x - y + 2z = 0;$

14)  $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - z, \pi: 2x + 4y - z - 5 = 0;$

15)  $F(x, y, z) \equiv x^2 + 2y^2 + z^2 - 1, \pi: x - y + 2z = 0;$

16)  $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - 2z, \pi: x + y - z - 1 = 0.$

**Задание 5.** Найдите точки локального экстремума функции:

1)  $z = f(x, y) = 2xy - 2x - 4y;$

2)  $z = f(x, y) = 2x + 8y - x^2 - 2y^2;$

3)  $z = f(x, y) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2;$

4)  $z = f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 3x + 8y;$

5)  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^3;$

6)  $z = f(x, y) = y^3 - 3x^2 - 27y + 12x;$

7)  $z = f(x, y) = x^2 - 4xy + 8y^3;$

8)  $z = f(x, y) = x^2 - 4xy + 8y^3;$

9)  $u = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z;$

10)  $u = f(x, y, z) = 3 + 2x - y - 12z - x^2 + xy - y^2 + z^3;$

11)  $z = f(x, y) = x^2 + 8 \ln y - 2 \ln x + y^2;$

12)  $z = f(x, y) = -3x^2 + 4xy + 24x - 3y^2 - 26y + 1;$

13)  $z = f(x, y) = 4x^2 - 24xy + 16x + 4y^2 - 34y + 1;$

14)  $z = f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 4xy + 2x - 2y^2 - 6y + 18;$

15)  $z = f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 10;$

$$16) z = f(x, y) = e^{x-y} (x^2 - 2y^2).$$

**Задание 6.** Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$  в квадрате, ограниченном прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$ ,  $y = 4$ .

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = 5x^2 - 4xy + 2y^2$  в области, задаваемой неравенством  $x^2 + y^2 \leq 5$ .

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x + 2y$  в области, задаваемой неравенством  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5$  в области, ограниченной осями координат и прямой  $x + y - 4 = 0$ .

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$  в области, ограниченной осями координат и прямой  $x + y + 3 = 0$ .

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + y^2 - xy - 4x$  в области, ограниченной осями координат и прямой  $2x + 3y - 12 = 0$ .

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = xy + x + y$  в области, ограниченной прямыми  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 2$ ,  $y = 3$ .

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^3 + y^3 - 3xy$  в области  $0 \leq x \leq 2$ ,  $-1 \leq y \leq 2$ .

9. Найдите наибольшее значение функции  $z = x - y^2 + 4y$  в области, определяемой неравенствами  $x \leq 3$ ,  $y \geq 0$ ,  $y - x \leq 0$ .

10. Из всех треугольников с одинаковым периметром  $2p$  определите треугольник с наибольшей площадью.

11. Найдите наибольшее значение функции  $f(x, y) = 2x - 2y$  при условиях  $3x - 2y \geq -6$ ,  $3x + y \geq 3$ ,  $0 \leq x \leq 3$ ,  $y \geq 0$ . Сделайте рисунок.

12. Найдите наименьшее значение функции  $f(x, y) = 3x + y$  при условиях  $x + y \geq 4$ ,  $x - y \leq 0$ ,  $x \geq 1$ ,  $y \leq 8$ . Сделайте рисунок.

13. Найдите наибольшее значение функции  $f(x, y) = 3 - x - y$  при условиях  $3x + 2y \geq 6$ ,  $2x - y \geq -3$ ,  $0 \leq x \leq 4$ ,  $y \geq 0$ . Сделайте рисунок.

14. Найдите наименьшее значение функции  $f(x, y) = 3 + x + 2y$  при условиях  $x + y \geq 6$ ,  $y - x \geq 0$ ,  $x \geq 2$ ,  $y \leq 10$ . Сделайте рисунок.

15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x, y) = 5x + 4y - 7$  на эллипсе  $D = \{(x, y) \mid 25x^2 + 16y^2 = 400\}$ .

16. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x, y) = -xy(x + y - 3)$  в замкнутой области в форме треугольника, ограниченного прямыми  $x + y = 6$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ .

## ТЕСТЫ

### Секция 1. Функции многих переменных. Предел последовательности и предел функции. Непрерывность

**Задание 1.** Найдите область определения функции

$z = \arcsin(x + y)$ . Выберите один из перечисленных ниже ответов:

1) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в полосе, ограниченной прямыми  $y = -x + 1$  и  $y = -x - 1$ ;

2) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в квадрате  $\{(x, y) \mid -1 < x < 1; -1 < y < 1\}$ ;

3) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в полосе, ограниченной прямыми  $y = -2x + 1$  и  $y = -2x - 1$ ;

4) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в полосе, ограниченной прямыми  $y = -x$  и  $y = -x - 2$ ;

5) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в полосе, ограниченной прямыми  $y = -2x + 2$  и  $y = -2x - 2$ .

**Задание 2.** Найдите область определения функции

$z = \ln(4 - x^2 - y^2)$ . Выберите один из перечисленных ниже ответов:

1) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в квадрате  $\{(x, y) | -2 < x < 2; -2 < y < 2\}$ ;

2) множество внутренних точек на координатной плоскости  $oxy$ , принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат;

3) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в кольце  $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ ;

4) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в полосе  $\{(x, y) | -1 < x < 1\}$ ;

5) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в круге радиуса 1 с центром в начале координат.

**Задание 3.** Найдите область определения функции:

$z = \arccos(x - y)$ . Выберите один из перечисленных ниже ответов:

1) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в полосе, ограниченной прямыми  $y = -2x + 1$  и  $y = -2x - 1$ ;

2) множество внутренних точек на координатной плоскости  $oxy$ , принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат;

3) множество точек координатной плоскости  $oxy$ , принадлежащих полосе, ограниченной прямыми  $y = x + 1$  и  $y = x - 1$ ;

4) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в полосе, ограниченной прямыми  $y = x$  и  $y = x - 2$ ;

5) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в полосе, ограниченной прямыми  $y = -2x + 2$  и  $y = -2x - 2$ .

**Задание 4.** Найдите область определения функции  $z = \arcsin\left(\frac{y}{x^2}\right)$ .

Выберите один из перечисленных ниже ответов:

1) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в области  $\{(x, y) | y < x^2\}$ ;

2) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в области  $\{(x, y) \mid y + 1 < x^2\}$ ;

3) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в области  $\{(x, y) \mid y - 1 < x^2\}$ ;

4) односвязная область на координатной плоскости  $oxy$ , ограниченная двумя парабололами  $y = x^2$  и  $y = -x^2$  и проходящая через ось  $ox$  с выколотой точкой в начале координат;

5) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в области  $\{(x, y) \mid -1 < y - x^2 < 1\}$ .

**Задание 5.** Найдите область определения функции

$z = \arccos \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ . Выберите один из перечисленных ниже ответов:

1) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в круге радиуса  $r = 1$  с центром в начале координат;

2) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в круге радиуса  $r = \sqrt{2}$  с центром в начале координат;

3) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в квадрате  $\{(x, y) \mid -1 < x < 1; -1 < y < 1\}$ ;

4) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в квадрате  $\{(x, y) \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}; -\sqrt{2} < y < \sqrt{2}\}$ ;

5) множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в кольце, ограниченном двумя концентрическими окружностями радиусов  $r = 1$  и  $r = \sqrt{2}$  с центром в начале координат.

**Задание 6.** Найдите предел функции  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$

в точке  $(0; 0)$ .

**Секция 2. Частные производные. Полный дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала**

**Задание 1.** Найдите частные производные  $z'_x(M)$ ,  $z'_y(M)$  функции  $z(x, y) = \sin(\pi xy)$  в точке  $M(1; 2)$ . В ответе запишите  $z'_x(M)/\pi + z'_y(M)/\pi$ .

**Задание 2.** Найдите первые частные производные функции в указанной точке:

$$z(x, y) = x^2 e^{-xy}, M_0(2; 0). \text{ В ответе запишите } z'_x(M_0) + z'_y(M_0).$$

**Задание 3.** Найдите первые частные производные функции в указанной точке:

$$z = y/\sqrt{x}; P_0(1; 2). \text{ В ответе запишите } z'_x(P_0) + z'_y(P_0).$$

**Задание 4.** Найдите первые частные производные функции в указанной точке:

$$z = \operatorname{arctg}(xy); P_0(1; 1). \text{ В ответе запишите } z'_x(P_0) + z'_y(P_0).$$

**Задание 5.** Найдите первые частные производные функции в указанной точке:

$$z = e^{(x-1)y}; P_0(1; 1). \text{ В ответе запишите } z'_x(P_0) + z'_y(P_0).$$

**Задание 6.** Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно  $(1,02)^3(0,97)^2$ .

**Задание 7.** Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно  $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$ .

**Задание 8.** Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно  $0,97^{1,05}$ .

**Задание 9.** Одна сторона прямоугольника  $a=10$  см, а другая  $b=24$  см. Как изменится диагональ прямоугольника, если сторону  $a$  удлинить на 4 мм, а сторону  $b$  укоротить на 1 мм. Найдите и запишите в см величину изменения диагонали прямоугольника:

- а) приближенно с помощью дифференциала;
- в) точную ее величину.

### Секция 3. Производная сложной функции. Производная по направлению и градиент функции

**Задание 1.** Найдите в указанной точке  $M_0(1;0)$  первые частные производные неявно заданной функции  $z^3 + 3xyz + 1 = 0$ . В ответе запишите  $z'_x(M_0) + z'_y(M_0)$ .

**Задание 2.** Найдите в указанной точке  $M_0(1;1;2)$  первые частные производные неявно заданной функции  $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0$ . В ответе запишите  $z'_x(M_0) + z'_y(M_0)$ .

**Задание 3.** Найдите производную функции  $z = \ln \frac{x^2 + y^2}{xy}$  по направлению  $\vec{l} = (6;8)$  в точке  $M(1;2)$ .

**Задание 4.** Найдите производную функции  $z = x^2 + xy + 2x + 2y$ , по направлению  $\vec{l} = (3;4)$  в точке  $M(1;1)$ .

**Задание 5.** Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону  $T(x; y) = 6x^2 - 5y$ . Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры  $J = |\text{grad}T(M_0)|$  в точке  $M_0(1;1)$ .

**Задание 6.** Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону  $T(x; y) = x \sin \pi y$ . Найдите наибольшее значение

скорости изменения температуры  $J = |\text{grad}T(M_0)|$  в точке  $M_0(1;1)$ .  
В ответе укажите значение  $J/\pi$ .

**Задание 7.** Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону  $T(x; y) = y^2 - 2xy$ . Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры  $J = |\text{grad}T(M_0)|$  в точке  $M_0(1;1)$ .

#### Секция 4. Элементы теории поля

**Задание 1.** Выберите уравнение касательной плоскости к поверхности  $F(x; y; z) = 0$  в указанной точке:

$$z = \ln(x^2 + y^2); (1; 0; 0).$$

- 1)  $x + 3y - 2z - 2 = 0$ ;
- 2)  $2x - y + 2z + 1 = 0$ ;
- 3)  $2x + 2y - z - 1 = 0$ ;
- 4)  $x + y - 2z - 2 = 0$ ;
- 5)  $3x - y + 2z + 2 = 0$ .

**Задание 2.** Выберите уравнение нормали к поверхности  $F(x; y; z) = 0$  в указанной точке:

$$z = \ln(x^2 + y^2); (1; 0; 0).$$

- 1)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$ ;
- 2)  $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ ;
- 3)  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{2}$ ;
- 4)  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-2}$ ;



$$5) \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}.$$

**Задание 3.** Выберите уравнение нормали к поверхности  $F(x; y; z) = 0$  в указанной точке:

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1; (3; 2; 2).$$

$$1) \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2};$$

$$2) \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{1};$$

$$3) \frac{x+2}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2};$$

$$4) \frac{x-3}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2};$$

$$5) \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}.$$

**Задание 4.** Выберите уравнение касательной плоскости к поверхности  $F(x; y; z) = 0$  в указанной точке:

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1; (3; 2; 2).$$

$$1) x + 2y + z = 2,$$

$$2) x + 2y - 3z = 3,$$

$$3) 2x + y - z = 2,$$

$$4) x - 3y + z = 3,$$

$$5) 3x - 2y - 2z = 1.$$

**Задание 5.** Выберите уравнение нормали к поверхности  $F(x; y; z) = 0$  в указанной точке:

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y; (1; 1; 1).$$

$$1) \frac{x-3}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2};$$

$$2) \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{2};$$

$$3) \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1};$$

$$4) \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3};$$

$$5) \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}.$$

**Задание 6.** Выберите уравнение касательной плоскости к поверхности  $F(x; y; z) = 0$  в указанной точке:

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y; (1; 1; 1).$$

$$1) x - 2y + z = 0,$$

$$2) 3x - y - 2z = 2,$$

$$3) x + 2y - z = 2,$$

$$4) 3x - 2y - 2z = 0,$$

$$5) 2x + y - z = 3.$$

### Секция 5. Локальный и глобальный экстремумы

**Задание 1.** Найдите точку локального минимума  $M(x_0; y_0)$  функции  $f(x; y) = x^2 - 2x + 2y^2$ . В ответе укажите сумму  $x_0 + y_0$ .

**Задание 2.** Найдите точку локального минимума  $M(x_0; y_0)$  функции  $f(x; y) = 2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5$ . В ответе укажите сумму  $x_0 + y_0$ .

**Задание 3.** Найдите точку локального максимума  $M(x_0; y_0)$  функции  $f(x; y) = -4x^2 - y^2 + 4y$ . В ответе укажите сумму  $x_0 + y_0$ .

**Задание 4.** Найдите условные экстремумы функции  $z = x + 2y$  при условии  $x^2 + y^2 = 5$ .

**Задание 5.** Найдите наибольшее значение функции  $z = 1 + x + 2y$  в 1-й четверти ( $x \geq 0, y \geq 0$ ).

## ОТВЕТЫ К ТЕСТОВЫМ ЗАДАНИЯМ

**Секция 1. Функции многих переменных. Предел последовательности и предел функции. Непрерывность**

**Задание 1.** Множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в полосе, ограниченной прямыми  $y = -x + 1$  и  $y = -x - 1$ .

**Задание 2.** Множество внутренних точек на координатной плоскости  $oxy$ , принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат.

**Задание 3.** Множество точек координатной плоскости  $oxy$ , принадлежащих полосе, ограниченной прямыми  $y = x + 1$  и  $y = x - 1$ .

**Задание 4.** Односвязная область на координатной плоскости  $oxy$ , ограниченная двумя параболой  $y = x^2$  и  $y = -x^2$ , и проходящая через ось  $ox$  с выколотой точкой в начале координат.

**Задание 5.** Множество точек на координатной плоскости  $oxy$ , лежащих в кольце, ограниченном двумя концентрическими окружностями радиусов  $r = 1$  и  $r = \sqrt{2}$  с центром в начале координат.

**Задание 6.** 1.

**Секция 2. Частные производные. Полный дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала**

**Задание 1.** 3.

**Задание 2.** -4.

**Задание 3.** 0.

**Задание 4.** 1.

**Задание 5.** 1.

**Задание 6.** 1,00.

**Задание 7.** 4,998.

**Задание 8.** 0,97.

**Задание 9.** 0,062; 0,065.

### **Секция 3. Производная сложной функции. Производная по направлению и градиент функции**

**Задание 1.** 1.

**Задание 2.**  $-23/9$ .

**Задание 3.**  $-0,12$ .

**Задание 4.** 5,4.

**Задание 5.** 13.

**Задание 6.** 1.

**Задание 7.** 2.

### **Секция 4. Элементы теории поля**

**Задание 1.**  $2x + 2y - z - 1 = 0$ .

**Задание 2.**  $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ .

**Задание 3.** 4)  $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$ .

**Задание 4.** 5)  $3x - 2y - 2z = 1$ .

**Задание 5.**  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ .

**Задание 6.**  $x - 2y + z = 0$ .

### **Секция 5. Локальный и глобальный экстремумы**

**Задание 1.** 1.

**Задание 2.** 0.

**Задание 3.** 2.

**Задание 4.**  $z_{\max} = 5$  в точке  $M_1(1; 2)$ ;  $z_{\min} = -5$  в точке  $M_2(-1; -2)$ .

**Задание 5.**  $z_{\text{наиб}} \equiv z(0; 1) = 3$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Карасев В.А., Левшина Г.Д.* Математический анализ: часть 1. Дифференциальное исчисление. – М.: Илекса, 2011. – 296 с.
2. *Дорофеева А.В.* Высшая математика для гуманитарных направлений: учебное пособие. – М.: Юрайт, 2012. – 400 с.
3. *Дорофеева А.В.* Высшая математика для гуманитарных направлений: сборник задач. – М.: Юрайт, 2013. – 175 с.
4. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. – М.: АЙРИС-ПРЕСС, 2017. – 603 с.
5. *Шершнев В.Г.* Математический анализ: учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2017. – 287 с.
6. *Кадымов В.А.* Дифференциальное и интегральное исчисления функции нескольких переменных. Элементы теории с примерами и вариантами расчетно-графических заданий: учебно-методическое пособие: часть 1. – М.: МГГЭУ, 2015. – 34 с.
7. *Кадымов В.А.* Дифференциальное и интегральное исчисления функции нескольких переменных. Элементы теории с примерами и вариантами расчетно-графических заданий: учебно-методическое пособие: часть 2. – М.: МГГЭУ, 2015. – 50 с.

# Содержание

<b>1. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность .....</b>	<b>3</b>
1.1. Область определения .....	3
1.2. Предел и непрерывность .....	5
<b>2. Частные производные и полный дифференциал .....</b>	<b>9</b>
2.1. Частные производные .....	9
2.2. Полный дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала .....	11
2.3. Частные производные высшего порядка. Формула Тейлора .....	16
<b>3. Дифференцирование сложной и неявной функции .....</b>	<b>20</b>
3.1. Производная по направлению и градиент функции .....	20
3.2. Дифференцирование неявных функций .....	24
3.3. Замена переменных в выражениях, содержащих частные производные .....	27
<b>4. Элементы теории поля .....</b>	<b>31</b>
4.1. Дифференциальные операторы .....	31
4.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности .....	34
<b>5. Локальный и глобальный экстремумы .....</b>	<b>37</b>
5.1. Локальный экстремум .....	37
5.2. Условный экстремум .....	43
5.3. Глобальный экстремум .....	56
<b>6. Рекомендуемые задачи. Разбор варианта расчетно-графического задания .....</b>	<b>59</b>
<b>7. Варианты расчетно-графических заданий для самостоятельного решения .....</b>	<b>61</b>
<b>Тесты .....</b>	<b>67</b>
<b>Ответы к тестовым заданиям .....</b>	<b>75</b>
<b>Литература .....</b>	<b>77</b>

Учебное издание

Вагид Ахмедович **Кадымов**

**ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.  
ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ  
ИСЧИСЛЕНИЕ**

*Учебно-методическое пособие*

Ответственный редактор  
Технический редактор  
Редактор/корректор  
Компьютерная верстка

С.А. Бобко  
К.А. Антонов  
Ю.Ф. Кравчинская  
К.А. Антонов

---

Подписано в печать 27.04.2018. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офисная. Гарнитура *Times New Roman*. Печ. лист 5.  
Тираж 31 экз. Заказ № 19.

Московский государственный гуманитарно-экономический университет  
107150, Москва, ул. Лосиноостровская, д. 49.  
Отпечатано в типографии МГГЭУ по технологии СтР.