

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИНКЛЮЗИВНОГО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра информационных технологий и прикладной математики

«Утверждаю»

Зав. кафедрой

 Петрунина Е.В.

«24» августа 2020

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

Б1.Б.07 Математический анализ

наименование дисциплины / практики

38.03.01. Экономика

шифр и наименование направления подготовки

Мировая экономика

Бухгалтерский учет, анализ и аудит

наименование профиля подготовки

Москва 2020

Составитель / составители: проф. Кадымов В.А.

Фонд оценочных средств рассмотрен и одобрен на заседании кафедры информационных технологий и прикладной математики протокол № 1 от «24» августа 2020 г.

Содержание

1. Паспорт фонда оценочных средств
2. Перечень оценочных средств
3. Описание показателей и критериев оценивания компетенций
4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций
5. Материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации

1. Паспорт фонда оценочных средств

по дисциплине «Математический анализ»

Таблица 1.

№ п/п	Контролируемые разделы (темы), дисциплины ¹	Коды компетенций	Оценочные средства - наименование	
			текущий контроль	промежуточная аттестация
1	Тема 1. Множества и функции. Аксиоматика множества действительных чисел.	ОПК-1 ОПК-3	Опрос	Вопросы к экзамену
2.	Тема 2. Числовые последовательности.	ОПК-1 ОПК-3	Опрос	Вопросы к экзамену
3.	Тема 3. Предел и непрерывность функций.	ОПК-1 ОПК-3	Опрос, проверка выполнения аудиторных заданий	Вопросы к экзамену
4.	Тема 4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.	ОПК-1 ОПК-3	Опрос, контр. работа	Вопросы к экзамену
5.	Тема 5. Общее исследование функции и построение ее графика.	ОПК-1 ОПК-3	Опрос, проверка выполнения аудиторных и домашних заданий	Вопросы к экзамену
6.	Тема 6. Дифференциальное исчисление функции многих переменных. Предел, непрерывность, частные производные, полный дифференциал.	ОПК-1 ОПК-3	Опрос	Вопросы к экзамену
7.	Тема 7. Дифференциальное исчисление функции многих переменных. Локальный и глобальный экстремумы.	ОПК-1 ОПК-3	Опрос, проверка выполнения аудиторных и домашних заданий	Вопросы к экзамену
8.	Тема 8. Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл.	ОПК-1 ОПК-3	Опрос, проверка выполнения аудиторных заданий, контр. работа	Вопросы к экзамену
9.	Тема 9. Интегральное исчисление функции одной переменной. Определенный интеграл. Несобственные интегралы.	ОПК-1 ОПК-3	Опрос, проверка выполнения аудиторных заданий	Вопросы к экзамену
10.	Тема 10. Интегральное	ОПК-1	Опрос, проверка	Вопросы к

¹ Наименование раздела (темы) берется из рабочей программы дисциплины.

	исчисление функции одной переменной. Приложения определенного интеграла.	ОПК-3	выполнения аудиторных и домашних заданий	экзамену
11.	Тема 11. Числовые ряды.	ОПК-1 ОПК-3	Опрос, контр. работа	Вопросы к экзамену
12.	Тема 12. Функциональные ряды.	ОПК-1 ОПК-3	Опрос	Вопросы к экзамену

Таблица 2.

Перечень компетенций:

Код компетенции	Содержание компетенции
ОПК-1	способность решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности
ОПК-3	способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновывать полученные выводы

2. Перечень оценочных средств²

Таблица 3.

№	Наименование оценочного средства	Характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в ФОС
1	Опрос	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде ответов обучающихся на задаваемые им вопросы.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
2	Контрольная работа	Форма проверки и оценки усвоенных знаний, получения информации о характере познавательной деятельности, уровне самостоятельности и активности обучающихся в учебном процессе, об эффективности методов, форм и способов учебной деятельности	Вопросы контрольной работы

3. Описание показателей и критериев оценивания результатов обучения на различных этапах формирования компетенций

Таблица 4.

Код компетенции	Уровень освоения компетенции	Показатели достижения компетенции	Критерии оценивания результатов обучения
		Знает	
ОПК-1	Недостаточный уровень Оценка «неудовлетворительно»	ОПК-1. 3-1 Не знает основные категории и специфику их понимания в математическом анализе	Не знает, либо не имеет четкого представления об основах математического анализа, категориальном аппарате математического анализа. Не знает больше половины формулировок определений и теорем, не умеет их применять на практике.
	Базовый уровень Оценка «удовлетворительно»	ОПК-1. 3-1 Знает основные категории и специфику их понимания в математическом анализе	Знает содержание изучаемой дисциплины, имеет представление о категориальном аппарате математического анализа. Знает 50% основного

² Указываются оценочные средства, применяемые в ходе реализации рабочей программы данной дисциплины.

			материала курса, однако испытывает затруднения при их применении.
	Средний уровень Оценка «хорошо»	ОПК-1. 3-1 Знает основные категории и специфику их понимания в математическом анализе	Хорошо понимает содержание изучаемой дисциплины, использует категориальный аппарат математического анализа. Знает основную часть материала, умеет применять его на практике.
	Высокий уровень Оценка «отлично»	ОПК-1. 3-1 Знает основные категории и специфику их понимания в математическом анализе	Демонстрирует глубокое понимание содержание изучаемой дисциплины, свободно владеет категориальным аппаратом математического анализа. Свободно владеет основным материалом курса и умеет применять его на практике
		Умеет	
ОПК-1	Недостаточный уровень Оценка «неудовлетворительно»	ОПК-1.У-1 Не умеет решать стандартные профессиональные задачи по образцу примера	Не владеет умениями, необходимыми для решения стандартных профессиональных задач с применением естественнонаучных знаний, методов математического анализа и моделирования.
	Базовый уровень Оценка «удовлетворительно»	ОПК-1.У-1 Умеет решать стандартные профессиональные задачи по образцу примера	Владеет основными умениями, необходимыми для решения стандартных профессиональных задач с применением естественнонаучных знаний, методов математического анализа и моделирования. Умеет частично применять формулировки, определения и теоремы при решении практических задач.
	Средний уровень Оценка «хорошо»	ОПК-1.У-1 Умеет решать стандартные профессиональные задачи по образцу примера	Владеет умениями, необходимыми для решения стандартных профессиональных задач с применением естественнонаучных знаний, методов математического анализа и моделирования. Умеет по образцу применять формулировки, определения и теоремы при решении практических задач.
	Высокий уровень	ОПК-1.У-1	В полной мере владеет умениями, необходимыми

	Оценка «отлично»	Умеет самостоятельно решать стандартные профессиональные задачи по образцу примера	для решения стандартных профессиональных задач с применением естественнонаучных знаний, методов математического анализа и моделирования. Умеет самостоятельно применять формулировки, определения и теоремы при решении практических задач
ОПК-1		Владеет	
	Недостаточный уровень Оценка «неудовлетворительно»	ОПК-1.В-1 Не владеет основными навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Не владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.
	Базовый уровень Оценка «удовлетворительно»	ОПК-1.В-1 Владеет основными навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Владеет в целом навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.
	Средний уровень Оценка «хорошо»	ОПК-1.В-1 Владеет основными навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	Хорошо владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.
	Высокий уровень Оценка «отлично»	ОПК-1.В-1 Владеет основными навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	В полном объеме владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.

Код компетенции	Уровень освоения компетенции	Показатели достижения компетенции	Критерии оценивания результатов обучения
		Знает	

ОПК-3	Недостаточный уровень Оценка «неудовлетворительно»	ОПК-3. 3-1 Не знает основные теоремы и формулы математического анализа	Не знает, либо не имеет четкого представления об основах математики
	Базовый уровень Оценка «удовлетворительно»»	ОПК-3. 3-1 Знает основные теоремы и формулы математического анализа	Знает о содержании изучаемой дисциплины, имеет представление об основах математики
	Средний уровень Оценка «хорошо»	ОПК-3. 3-1 Знает основные теоремы и формулы математического анализа	Хорошо понимает содержание изучаемой дисциплины, имеет хорошее представление об основах математики
	Высокий уровень Оценка «отлично»	ОПК-3. 3-1 Знает основные теоремы и формулы математического анализа	Демонстрирует глубокое понимание содержание изучаемой дисциплины, имеет глубокое представление об основах математики.
		Умеет	
ОПК-3	Недостаточный уровень Оценка «неудовлетворительно»	ОПК-3.У-1 Не умеет самостоятельно применять основные теоремы и формулы математического анализа	Не владеет умениями, необходимыми для решения стандартных профессиональных задач с применением естественнонаучных знаний, методов математического анализа и моделирования.
	Базовый уровень Оценка «удовлетворительно»	ОПК-3.У-1 Умеет самостоятельно применять основные теоремы и формулы математического анализа	Владеет основными умениями, необходимыми для решения стандартных профессиональных задач с применением естественнонаучных знаний, методов математического анализа и моделирования.
	Средний уровень Оценка «хорошо»	ОПК-3.У-1 Умеет самостоятельно применять основные теоремы и формулы математического анализа	Хорошо владеет умениями, необходимыми для решения стандартных профессиональных задач с применением естественнонаучных знаний, методов математического анализа и моделирования.
	Высокий уровень Оценка «отлично»	ОПК-3.У-1 Умеет самостоятельно применять основные теоремы и формулы математического	В полной мере владеет умениями, необходимыми для решения стандартных профессиональных задач с применением естественнонаучных знаний,

		анализа	методов математического анализа и моделирования.
ОПК-3		Владеет	
	Недостаточный уровень Оценка «неудовлетворительно»	ОПК-3.В-1 Не владеет основными методами, приемами, алгоритмами и способами применения современного математического аппарата для решения задач профессиональной деятельности.	Не владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.
	Базовый уровень Оценка «удовлетворительно»	ОПК-3.В-1 Владеет основными методами, приемами, алгоритмами и способами применения современного математического аппарата для решения задач профессиональной деятельности.	Ориентируется в алгоритме теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.
	Средний уровень Оценка «хорошо»	ОПК-3.В-1 Владеет основными методами, приемами, алгоритмами и способами применения современного математического аппарата для решения задач профессиональной деятельности.	Хорошо ориентируется в алгоритме теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.
	Высокий уровень Оценка «отлично»	ОПК-3.В-1 Владеет основными методами, приемами, алгоритмами и способами применения современного математического аппарата для решения задач профессиональной деятельности.	В полной мере ориентируется в алгоритме теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения

Контрольная работа как форма оценки результатов обучения

Контрольная работа назначается после изучения определенного раздела (разделов) дисциплины и представляет собой совокупность развернутых письменных ответов студентов на вопросы, которые они получают от преподавателя.

Самостоятельная подготовка к контрольной работе включает в себя:

- изучение конспектов лекций, раскрывающих материал, знание которого проверяется контрольной работой;
- повторение учебного материала, полученного при подготовке к семинарским, практическим занятиям и во время их проведения;
- изучение дополнительной литературы, в которой конкретизируется содержание проверяемых знаний;
- составление в мысленной форме ответов на поставленные в контрольной работе вопросы;
- формирование психологической установки на успешное выполнение всех заданий.

Методические рекомендации по подготовке к устному опросу

Подготовка к опросу проводится в ходе самостоятельной работы студентов и включает в себя повторение пройденного материала по вопросам предстоящего опроса. Помимо основного материала студент должен изучить дополнительную рекомендованную литературу и информацию по теме, в том числе с использованием Интернет-ресурсов. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 3 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации студентом своей самостоятельной работы. Опрос предполагает устный ответ студента на один основной и несколько дополнительных вопросов преподавателя. Ответ студента должен представлять собой развернутое, связанное, логически выстроенное сообщение. При выставлении оценки преподаватель учитывает правильность ответа по содержанию, его последовательность, самостоятельность суждений и выводов, умение связывать теоретические положения с практикой, в том числе и с будущей профессиональной деятельностью.

5. Материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации

Вопросы для опроса

Тема 1. Множества и функции. Аксиоматика множества действительных чисел.

1. Назовите основные понятия теории множеств
2. Раскройте понятие функции
3. Дайте классификацию функций
4. Что из себя представляют ограниченные числовые множества?

Тема 2 : Понятие числовой последовательности.

1. Раскройте понятие числовой последовательности.
2. Что из себя представляют бесконечно малые и бесконечно большие числовые последовательности?
3. Что такое сходящиеся числовые последовательности?
4. Раскройте понятие фундаментальной последовательности.
5. Можно ли $\{c_n\}$ назвать числовой последовательностью, если

1. $c_n = \sqrt{n}$.

2. $c_n = \frac{1}{2n-3}$.

3. $c_n = \frac{n}{2n-4}$.

4. $c_n = \cos n$.

5. $c_n = \sin n$.

6. $c_n = \frac{n+1}{n-1}$

7. $c_n = \frac{n-1}{n+1}$

8. $c_n = 2e^{-3n}$.

9. $c_n = -e^{5n-4}$.

10. $c_n = \sqrt{3n-5}$.

11. $c_n = \sqrt{5-3n}$.

12. $c_n = 3e^{\frac{1}{n-4}}$.

13. $c_n = 2^{3n}$.

14. $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

15. $c_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$.

Тема 3 : Предел и непрерывность функции.

1. Перечислите основные свойства пределов.

2. Найти $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, если

1. $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$, $a = -1$.

2. $f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$, $a = -3$.

3. $f(x) = \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$, $a = 0$, $\alpha \cdot \beta \neq 0$.

4. $f(x) = \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 5x}$, $a = 0$.

5. $f(x) = \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}$, $a = 0$.

6. $f(x) = \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}$, $a = 0$.

7. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}$, $a = 0$.

8. $f(x) = x^x$, $a = 0$.

9. $f(x) = \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$, $a = 0$.

10. $f(x) = \left(\frac{x^3 + 8}{3x^2 + 10}\right)^{x+2}$, $a = 0$.

11. $f(x) = (1 + 5x)^{2/x}$, $a = 0$.

12. $f(x) = \left(\frac{\operatorname{tg} 4x}{x}\right)^{2+x}$, $a = 0$.

13. $f(x) = \left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$, $a = 0$.

14. $f(x) = (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x)^{x^2+x+1}$, $a = 0$.

15. $f(x) = (\arcsin x + \arccos x)^{1/x}$, $a = 1/2$.

3. Определите точку разрыва, характер разрыва и скачок функции f в точке разрыва.

1. $f(x) = \frac{|x+1|}{x+1}$.

2. $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$

3. $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$.
4. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0, \\ 2, & x > 0. \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$
6. $f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}$.
7. $f(x) = \frac{\sin 2x}{x^2}$.
8. $f(x) = \frac{1 - \cos 3x}{5x^2}$.
9. $f(x) = \frac{|2x+1|}{2x+1}$.
10. $f(x) = \frac{2x+1}{|2x+1|}$.
11. $f(x) = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2}, & x < -2, \\ \sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2. \end{cases}$
12. $f(x) = \begin{cases} \frac{|x+3|}{x+3}, & x < -3, \\ \sqrt{9-x^2}, & -3 \leq x \leq 3, \\ \frac{1}{x-3}, & x > 3. \end{cases}$
13. $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x < 0, \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$
14. $f(x) = \frac{\cos 3x - 1}{x^3}$.
15. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

Тема 4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

1. Найдите в указанной точке первые частные производные функции, заданной неявно:

$$z^3 + 3xyz + 1 = 0, M_0(0;1). \text{ В ответе запишите } z'_x(M_0) + z'_y(M_0).$$

2. Найдите в указанной точке первые частные производные функции, заданной неявно:

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0, M_0(1;1;2). \text{ В ответе запишите } z'_x(M_0) + z'_y(M_0).$$

3. Найдите производную функции $z = \ln \frac{x^2 + y^2}{xy}$, по направлению $\vec{l} = (6;8)$ в точке

$$M(1;2).$$

4. Найдите производную функции $z = x^2 + xy + 2x + 2y$, по направлению $\vec{l} = (3;4)$ в точке $M(1;1)$.

Тема 5. Общее исследование функции и построение ее графика

1. Найти асимптоты графика функции f .

$$1. f(x) = \frac{1-x^2}{x+1}.$$

$$2. f(x) = \frac{2-x^2}{4x-1}.$$

$$3. f(x) = \frac{3-x^2}{x+5}.$$

$$4. f(x) = \frac{2x^2-6}{x-2}.$$

$$5. f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}.$$

$$6. f(x) = \frac{x^2-3}{x-1}.$$

$$7. f(x) = \frac{x^2+5}{5-3x}.$$

$$9. f(x) = \frac{1-x^2}{x+2}.$$

$$10. f(x) = \frac{7-x^2}{x-5}.$$

$$11. f(x) = \frac{9+x^2}{x-9}.$$

$$12. f(x) = \frac{x^2-8}{x+1}.$$

$$13. f(x) = \frac{8 - x^2}{x - 3}.$$

$$14. f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}.$$

$$15. f(x) = \frac{21 - x^2}{7x + 9}.$$

2. Функцию f исследуйте на локальный экстремум.

$$1) f(x, y) = 8x^2 + 4xy + 5y^2 + 6.$$

$$2) f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 4.$$

$$3) f(x, y) = 3x^2 + 3xy + 5y^2 + 9.$$

$$4) f(x, y) = 2x^2 - xy + 3y^2 + 4.$$

$$5) f(x, y) = 5x^2 + 6xy + 7y^2 - 8.$$

$$6) f(x, y) = -7x^2 + 6xy - 5y^2 + 1.$$

$$7) f(x, y) = 10x^2 + 5xy + 3y^2 - 7.$$

$$8) f(x, y) = 6x^2 - xy + 5y^2 + 3.$$

$$9) f(x, y) = 9x^2 + 12xy + 13y^2 + 10.$$

$$10) f(x, y) = -13x^2 + 4xy - y^2 - 7.$$

$$11) f(x, y) = 15x^2 - 4xy + 8y^2 + 9.$$

$$12) f(x, y) = 20x^2 + 11xy + 7y^2 + 10.$$

$$13) f(x, y) = -15x^2 + 9xy - 8y^2 + 13.$$

$$14) f(x, y) = 7x^2 + 8xy + 10y^2 + 1.$$

$$15) f(x, y) = 4x^2 - 13xy + 11y^2 + 12.$$

Тема 6. Дифференциальное исчисление функции многих переменных. Предел, непрерывность, частные производные, полный дифференциал.

1. Найдите частные производные $z'_x(M)$, $z'_y(M)$ функции $z(x, y) = \sin(\pi xy)$ в точке $M(1; 2)$. В ответе запишите $z'_x(M)/\pi + z'_y(M)/\pi$.

2. Найдите первые частные производные функции в указанной точке:
 $z(x, y) = x^2 e^{-xy}$, $M_0(2; 0)$. В ответе запишите $z'_x(M_0) + z'_y(M_0)$.

3. Найдите первые частные производные функции в указанной точке:
 $z = y/\sqrt{x}$; $P_0(1; 2)$. В ответе запишите $z'_x(P_0) + z'_y(P_0)$.

4. Найдите первые частные производные функции в указанной точке:

$$z = \arctg(xy); \quad P_0(1;1). \text{ В ответе запишите } z'_x(P_0) + z'_y(P_0).$$

Тема 7: Дифференциальное исчисление функции. Локальные и глобальные экстремумы.

1. Исследовать функцию f на локальный и глобальный экстремумы на заданном отрезке $[a; b]$.

1. $f(x) = x^2 + \frac{16}{x} - 16, [1; 4].$

2. $f(x) = 4 - x - \frac{4}{x^2} - 16, [1; 4].$

3. $f(x) = 2\sqrt{x} - x, [0; 4].$

4. $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 5, [1; 9].$

5. $f(x) = \frac{10x}{1+x^2}, [0; 3].$

6. $f(x) = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59, [2; 4].$

7. $f(x) = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}, [-1; 2].$

8. $f(x) = x - 4\sqrt{x+2} + 8, [-1; 7].$

9. $f(x) = \frac{2(-x^2 + 7x - 7)}{x^2 - 2x + 2}, [1; 4].$

10. $f(x) = \frac{4x}{4+x^2}, [-4; 2].$

11. $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8, [-4; -1].$

12. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 16}{x - 1} - 13, [2; 5].$

13. $f(x) = 8x + \frac{4}{x^2} - 15, \left[\frac{1}{2}; 2 \right].$

14. $f(x) = \frac{4}{x^2} - 8x - 15, \left[-2; \frac{1}{2} \right].$

15. $f(x) = \frac{10x + 10}{x^2 + 2x + 2}, [-1; 2].$

Тема 8. Интегральное исчисление функции одной переменной. Определенный интеграл. Несобственные интегралы

Разноуровневые задачи:

Тема 3: Предел и непрерывность функции

Задания репродуктивного уровня

Задание . Найдите $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$, если

$$1. c_n = \frac{(n+3)^2 + (n-3)^2}{(n+1)^2 + (n-1)^2}.$$

$$2. c_n = \frac{n\sqrt[3]{3n^2} + \sqrt[4]{5n^8} - 2}{(n+2\sqrt{n})\sqrt{3-n+5n^2}}.$$

$$3. c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

$$4. c_n = \sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n-1}.$$

$$5. c_n = \frac{1+2+\dots+n}{\sqrt{5n^4+3}}.$$

$$6. c_n = \frac{1+3+\dots+(2n+1)}{1+2+\dots+n}.$$

$$7. c_n = \frac{n!+3(n+2)!}{(n-1)!+5(n+2)!}.$$

$$8. c_n = \left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^n.$$

$$9. c_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^{n^2-1}.$$

$$10. c_n = \frac{2+4+\dots+2n}{n^2+2n+3}.$$

$$11. c_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}}.$$

$$12. c_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

$$13. c_n = \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+5}\right)^{3n^2-1}.$$

$$14. c_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}.$$

$$15. c_n = \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}.$$

Выберите правильный ответ:

1. Укажите последовательности, сходящиеся к числу 3 :

1): $\frac{3n - 2}{n + 5}$;

2): $\frac{3n}{n + 5} \sin\left(\frac{2}{n + 5}\right)$;

3): $\frac{3n}{n + 6} \cos\left(\frac{2}{n + 5}\right)$;

4): $n(\sqrt{n + 2} - \sqrt{n})$.

2. Найдите предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 1}{3n + 5}\right)^{2n}.$$

3. Найдите предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7 - 3 \cos 7n}{\sqrt{n + 2}}\right).$$

4. Укажите значение предела последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1) \sin 2n}{n^2}.$$

5. Укажите значение предела последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n + 1}\right)^{2n}.$$

6. Найдите значение предела последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

7. Найдите предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n^2}.$$

8. Найдите предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 \cos \pi x).$$

9. Найдите предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x}{x - 1}\right).$$

10. Найдите предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}.$$

11. Найдите предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\cos \pi x} \right).$$

12. Найдите предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{2x}.$$

13. Найдите предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\pi x \operatorname{ctg} 2\pi x).$$

14. Найдите предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin 2n \cdot \sin \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right).$$

15. Найдите предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{\cos 2\pi x} \right).$$

Задания реконструктивного уровня

Задание. Проведите полное исследование функции и постройте её график.

1. $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}.$

2. $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$

3. $f(x) = \frac{2}{x^2 + 2x}.$

4. $f(x) = \frac{4x^2}{3 + x^2}.$

5. $f(x) = \frac{12x}{9 + x^2}.$

6. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}.$

7. $f(x) = \frac{4 - x^3}{x^2}.$

8. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}.$

9. $f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2}.$

10. $f(x) = \frac{(x-1)}{x^2}.$

$$11. f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}.$$

$$12. f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2.$$

$$13. f(x) = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}.$$

$$14. f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}.$$

$$15. f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}.$$

Тема 3. Предел и непрерывность функции

Выберите правильный ответ:

1. Отметьте функции, непрерывные в точке $x = 2$:

1): $y = \operatorname{tg} \pi x$;

2): $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$;

3): $y = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)$;

4): $y = \operatorname{ctg} 2\pi x$.

2. Укажите функции, которые имеют разрыв в точке $x = 2$:

1): $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$;

2): $y = \operatorname{tg} \pi x$;

3): $y = \frac{x + 2}{\cos(x - 2)}$;

4): $y = \begin{cases} \frac{\sin(x-2)}{x-2}, & x > 2 \\ 2, & x \leq 2 \end{cases}$.

3. Укажите величину скачка функции $y = \frac{5|x-1|}{x-1}$ в точке разрыва $x = 1$.

4. Отметьте функции, непрерывные на всей числовой прямой:

1): $y = x + \operatorname{arcctg} x$;

2): $y = 5 \ln(x - 2)$;

3): $y = \sqrt{5 \sin 2x + 3}$;

4): $y = \sqrt{5 - 3 \cos x}$.

5. Запишите величину скачка функции $y = \frac{|x-3|}{2(x-3)}$ в точке разрыва $x = 3$.

6. Запишите величину скачка функции $y = \begin{cases} 3^x, & x \geq 0 \\ 2 \cos x, & x < 0 \end{cases}$ в точке разрыва.

7. Запишите величину скачка функции $y = \begin{cases} \ln(x+1), & x > 0 \\ x^2 - 2, & x < 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$.

8. Укажите функции, которые имеют разрыв в точке $x = 0$:

1): $y = \frac{\sin x}{|\cos x|}$;

2): $y = \frac{\sin 2x}{x+2}$;

3): $y = \frac{\sin x}{|x|}$;

4): $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

9. Отметьте функции, непрерывные на всей числовой прямой:

1): $y = \ln(x^2 + 1)$;

2): $y = \sqrt{2 - \sin 3x}$;

3): $y = \sqrt{2 + 3 \cos x}$;

4): $y = \ln(x+1)$.

10. Укажите величину скачка функции $y = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{4}, & x > 1 \\ \cos \frac{\pi x}{4}, & x < 1 \end{cases}$ в точке $x = 1$.

11. Укажите величину скачка функции $y = 2|x| \operatorname{ctg} x$ в точке $x = 0$.

12. Укажите величину скачка функции $y = \begin{cases} 3x^2, & x > 1 \\ \sin \pi x, & x < 1 \end{cases}$ в точке $x = 1$.

13. Отметьте функции, непрерывные на всей числовой прямой:

1): $y = \frac{\sin x}{2^x}$;

2): $y = \sqrt{2 - 2^x}$;

3): $y = \frac{\cos x}{\ln(x^2 + 2)}$;

$$4): y = \frac{\operatorname{ctg} \pi(x^2 + 2)}{x^2 + 2}.$$

14. Укажите величину скачка функции $y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x}$ в точке $x = 0$.

15. Укажите величину скачка функции $y = 2 \operatorname{arcctg} \frac{3}{x}$ в точке $x = 0$.

Тема 4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

1. Найдите в указанной точке первые частные производные функции, заданной неявно:

$$z^3 + 3xyz + 1 = 0, M_0(0; 1). \text{ В ответе запишите } z'_x(M_0) + z'_y(M_0).$$

2. Найдите в указанной точке первые частные производные функции, заданной неявно:

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0, M_0(1; 1; 2). \text{ В ответе запишите } z'_x(M_0) + z'_y(M_0).$$

3. Найдите производную функции $z = \ln \frac{x^2 + y^2}{xy}$, по направлению $\vec{l} = (6; 8)$ в точке

$$M(1; 2).$$

4. Найдите производную функции $z = x^2 + xy + 2x + 2y$, по направлению $\vec{l} = (3; 4)$ в точке $M(1; 1)$.

5. Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону

$$T(x; y) = 6x^2 - 5y. \text{ Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры}$$

$$J = |\operatorname{grad} T(M_0)| \text{ в точке } M_0(1; 1).$$

6. Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону

$$T(x; y) = x \sin \pi y. \text{ Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры}$$

$$J = |\operatorname{grad} T(M_0)| \text{ в точке } M_0(1; 1). \text{ В ответе укажите значение } J/\pi.$$

7. Температурное поле в листе металла распределено по указанному закону

$$T(x; y) = y^2 - 2xy. \text{ Найдите наибольшее значение скорости изменения температуры}$$

$$J = |\operatorname{grad} T(M_0)| \text{ в точке } M_0(1; 1).$$

Тема 7. Дифференциальное исчисление функции многих переменных. Предел, непрерывность, частные производные, полный дифференциал

1. Найдите область определения функции $z = \arcsin(x + y)$. Выберите один из перечисленных ниже ответов.

1) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -x + 1$ и $y = -x - 1$;

2) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в квадрате

$$\{(x, y) | -1 < x < 1; -1 < y < 1\};$$

- 3) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -2x + 1$ и $y = -2x - 1$;
- 4) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -x$ и $y = -x - 2$;
- 5) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -2x + 2$ и $y = -2x - 2$.

2. Найдите область определения функции $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$. Выберите один из перечисленных ниже ответов.

- 1) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в квадрате $\{(x, y) | -2 < x < 2; -2 < y < 2\}$;
- 2) множество внутренних точек на координатной плоскости Oxy , принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат;
- 3) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в кольце $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 2\}$;
- 4) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе $\{(x, y) | -1 < x < 1\}$;
- 5) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в круге радиуса 1 с центром в начале координат.

3. Найдите область определения функции $z = \arccos(x - y)$. Выберите один из перечисленных ниже ответов.

- 1) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -2x + 1$ и $y = -2x - 1$;
- 2) множество внутренних точек на координатной плоскости Oxy , принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат;
- 3) множество точек координатной плоскости Oxy , принадлежащих полосе, ограниченной прямыми $y = x + 1$ и $y = x - 1$;
- 4) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = x$ и $y = x - 2$;
- 5) множество точек на координатной плоскости Oxy , лежащих в полосе, ограниченной прямыми $y = -2x + 2$ и $y = -2x - 2$.

4. Найдите область определения функции $z = \arcsin\left(\frac{y}{x^2}\right)$. Выберите один из перечисленных ниже ответов.

- 1) множество точек на координатной плоскости oxy , лежащих в области $\{(x, y) \mid y < x^2\}$;
- 2) множество точек на координатной плоскости oxy , лежащих в области $\{(x, y) \mid y + 1 < x^2\}$;
- 3) множество точек на координатной плоскости oxy , лежащих в области $\{(x, y) \mid y - 1 < x^2\}$;
- 4) односвязная область на координатной плоскости oxy , ограниченная двумя парабололами $y = x^2$ и $y = -x^2$, и проходящая через ось ox с выколотой точкой в начале координат;
- 5) множество точек на координатной плоскости oxy , лежащих в области $\{(x, y) \mid -1 < y - x^2 < 1\}$.

5. Найдите область определения функции $z = \arccos \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. Выберите один из перечисленных ниже ответов.

- 1) множество точек на координатной плоскости oxy , лежащих в круге радиуса $r = 1$ с центром в начале координат;
- 2) множество точек на координатной плоскости oxy , лежащих в круге радиуса $r = \sqrt{2}$ с центром в начале координат;
- 3) множество точек на координатной плоскости oxy , лежащих в квадрате $\{(x, y) \mid -1 < x < 1; -1 < y < 1\}$;
- 4) множество точек на координатной плоскости oxy , лежащих в квадрате $\{(x, y) \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}; -\sqrt{2} < y < \sqrt{2}\}$;
- 5) множество точек на координатной плоскости oxy , лежащих в кольце, ограниченной двумя концентрическими окружностями радиусов $r = 1$ и $r = \sqrt{2}$ с центром в начале координат.

6. Найдите предел функции $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ в точке $(0; 0)$.

Частные производные. Полный дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

5. Найдите первые частные производные функции в указанной точке:

$$z = e^{(x-1)y}; \quad P_0(1; 1). \text{ В ответе запишите } z'_x(P_0) + z'_y(P_0).$$

6. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $(1,02)^3 (0,97)^2$.

7. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$.

8. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно $0,97^{1,05}$.

9. Одна сторона прямоугольника $a = 10$ см, а другая $b = 24$ см. Как изменится диагональ прямоугольника, если сторону a удлинить на 4 мм, а сторону b укоротить на 1 мм.

Найдите и запишите в см величину изменения диагонали прямоугольника:

А) приближенно с помощью дифференциала; В) точную ее величину.

Тема 8. Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл

1. Определите функцию $f(x)$, для которой $F(x) = f(x)$, где $F(x)$ - первообразная от функции $f(x)$:

1): $c \cdot e^x$;

2) $\ln x$;

3) $c \cdot \sin x$;

4) $\cos x$.

2. Найдите интеграл $\int (\sin x - \cos x)^2 dx$.

1): $\cos 2x + c$;

2): $\sin 2x + c$;

3): $x + \frac{1}{2} \cos 2x + c$;

4): $\sin 2x + \cos 2x + c$.

3. Найдите интеграл $\int \cos(2-x) dx$.

1): $2x - \sin x + c$;

2): $\cos(x-2) + c$;

3): $2 \sin x + c$;

4): $\sin(x-2) + c$.

4. Найдите интеграл $\int \cos 2x dx$.

1): $-\sin 2x + c$;

2): $2 \sin x + c$;

3): $-2 \cos x + c$;

4): $\frac{1}{2} \sin 2x + c$.

Тема 9. Интегральное исчисление функции одной переменной. Определенный интеграл. Несобственные интегралы.

Задания репродуктивного уровня

Задание . Найдите частные производные f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} и полный дифференциал d^2f функции $f(x, y)$.

- 1) $f(x, y) = 8x^2 + 4xy + 5y^2 + 6$.
- 2) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 4$.
- 3) $f(x, y) = 3x^2 + 3xy + 5y^2 + 9$.
- 4) $f(x, y) = 2x^2 - xy + 3y^2 + 4$.
- 5) $f(x, y) = 5x^2 + 6xy + 7y^2 - 8$.
- 6) $f(x, y) = -7x^2 + 6xy - 5y^2 + 1$.
- 7) $f(x, y) = 10x^2 + 5xy + 3y^2 - 7$.
- 8) $f(x, y) = 6x^2 - xy + 5y^2 + 3$.
- 9) $f(x, y) = 9x^2 + 12xy + 13y^2 + 10$.
- 10) $f(x, y) = -13x^2 + 4xy - y^2 - 7$.
- 11) $f(x, y) = 15x^2 - 4xy + 8y^2 + 9$.
- 12) $f(x, y) = 20x^2 + 11xy + 7y^2 + 10$.
- 13) $f(x, y) = -15x^2 + 9xy - 8y^2 + 13$.
- 14) $f(x, y) = 7x^2 + 8xy + 10y^2 + 1$.
- 15) $f(x, y) = 4x^2 - 13xy + 11y^2 + 12$.

Задания творческого уровня

Задание. Применяя методы интегрирования и табличные интегралы, найдите заданные неопределённые интегралы.

- 1) $\int \frac{xdx}{7+x^2}$.
- 2) $\int \frac{(x+18)dx}{x^2-4x-12}$.
- 3) $\int (3-x)\cos x dx$.
- 4) $\int \frac{(x+4)dx}{x^2-2x-8}$.
- 5) $\int x \ln(1-3x) dx$.
- 6) $\int \frac{dx}{5-x^2}$.
- 7) $\int xe^{-5x}$.

- 8) $\int \operatorname{arctg} 2x dx.$
 9) $\int \arcsin 3x dx.$
 10) $\int x \sin 5x dx.$
 11) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx.$
 12) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{3x+1}}.$
 13) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} dx}{1 + \sqrt{x}}.$
 14) $\int x e^{-x^2} dx.$
 15) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$

Тема 9. Интегральное исчисление функции одной переменной. Определенный интеграл. Несобственные интегралы

6. Вычислите и запишите значение интеграла

$$\int_0^2 (x-1)^{11} dx.$$

7. Вычислите и запишите значение интеграла $\int_1^3 (x-2)^9 dx.$

8. Вычислите и запишите значение интеграла $\int_1^3 11(x-2)^{10} dx.$

9. Вычислите и запишите значение интеграла $\int_3^5 7(x-4)^6 dx.$

10. Вычислите интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2) \sin x dx.$$

11. Вычислите интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos x dx.$$

12. Вычислите интеграл:

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx .$$

13. Вычислите интеграл:

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (x+1) \sin x dx .$$

14. Вычислите интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx .$$

15. Вычислите интеграл:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (x-1) \sin x dx .$$

Тема 10. Интегральное исчисление функции одной переменной. Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла

1. Вычислите и запишите значение интеграла

$$\int_2^4 7(x-3)^6 dx .$$

2. Вычислите и запишите значение интеграла $\int_2^4 9(x-3)^8 dx .$

3. Вычислите и запишите значение интеграла

$$\int_2^4 10(x-3)^9 dx .$$

4. Вычислите и запишите значение интеграла

$$\int_0^2 9(x-1)^8 dx .$$

5. Вычислите и запишите значение интеграла $\int_0^2 11(x-1)^{10} dx .$

Тема 11. Числовые ряды.

1. Пользуясь одним из признаков сходимости, убедитесь в сходимости числового ряда

$$\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

Найдите и запишите ее сумму.

2. Пользуясь одним из признаков сходимости, убедитесь в сходимости числового ряда

$$\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \frac{35}{216} + \dots + \frac{2^n + 3^n}{6^n} + \dots$$

Найдите и запишите ее сумму.

3. Пользуясь одним из признаков сходимости, убедитесь в сходимости числового ряда

$$\frac{4}{4 \times 5} + \frac{4}{5 \times 6} + \frac{4}{6 \times 7} + \dots + \frac{4}{(n+3)(n+4)} + \dots$$

Найдите и запишите ее сумму.

4. Пользуясь одним из признаков сходимости, убедитесь в сходимости числового ряда

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Найдите и запишите ее сумму.

Аудиторные и домашние задания

Задание. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной заданными кривыми. Сделайте чертёж области.

- 1) $3x^2 - 4y = 0$, $2x - 4y + 1 = 0$.
- 2) $3x^2 - 4y = 0$, $2x - 4y - 1 = 0$.
- 3) $2x - 3y^2 = 0$, $2x + 2y + 1 = 0$.
- 4) $3x^2 - 4y = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$.
- 5) $x^2 - y = 0$, $x + y = 1$.
- 6) $2x - 3y^2 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$.
- 7) $x^2 - y = 0$, $x - y = -1$.
- 8) $x^2 - 1 + y = 0$, $y - 1/2 = 0$.
- 9) $y = x^3 + 3$, $x = 0$, $y = x - 2$, $x = 2$.
- 10) $y = x^3 + 2$, $x = 0$, $y = x - 2$, $x = 2$.
- 11) $y = x^3 + 1$, $x = 0$, $y = x - 3$, $x = 2$.
- 12) $y = x^3 - 1$, $x = 0$, $y = x - 5$, $x = 2$.
- 13) $y = x^3 - 2$, $x = 0$, $y = x - 6$, $x = 2$.
- 14) $y = x^3 + 3$, $x = 0$, $y = x + 7$, $x = -2$.
- 15) $y = x^3 - 1$, $x = 0$, $y = x + 3$, $x = -2$.

Задание. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследуйте сходимость ряда на концах интервала сходимости.

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 4}{3^n} (x + 3)^n.$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 6}{6^n} (x - 6)^n.$$

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \frac{n^2 - 4}{3^n} (x - 4)^n.$$

$$4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 2}{2^n} (x + 2)^n.$$

$$5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 6}{6^n} (x + 6)^n.$$

$$6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 5}{5^n} (x - 5)^n.$$

$$7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 2}{2^n} (x - 2)^n.$$

$$8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 4}{4^n} (x + 4)^n.$$

$$9) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 5}{5^n} (x + 5)^n.$$

$$10) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 3}{3^n} (x - 3)^n.$$

$$11) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x - 4)^n}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

$$12) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x + 3)^n}{3^n}.$$

$$13) \sum_{n=1}^{+\infty} (2n^2 - 1)(x - 2)^n.$$

$$14) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x + 1)^n}{5^n}.$$

$$15) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x - 3)^n}{2^n}.$$

Задание. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле. Сделайте чертёж области интегрирования.

$$1) \int_{-1}^0 dx \int_{-8x^3}^{6-3x} f(x, y) dy.$$

$$2) \int_0^1 dy \int_{-4y-4}^{-8y^3} f(x, y) dx.$$

$$3) \int_0^1 dx \int_{8x^3}^{4x+4} f(x, y) dy.$$

$$4) \int_{-1}^0 dy \int_{2y-6}^{8y^3} f(x, y) dx.$$

$$5) \int_{-1}^0 dx \int_{4x-4}^{8x^3} f(x, y) dy.$$

$$6) \int_0^1 dy \int_0^{2y+6} f(x, y) dx.$$

$$7) \int_0^1 dx \int_{-2x-6}^{-8x^3} f(x, y) dy.$$

$$8) \int_{-1}^0 dy \int_{-8y^3}^{-4y+4} f(x, y) dx.$$

$$9) \int_0^1 dx \int_{-4x-4}^{-8x^3} f(x, y) dy.$$

$$10) \int_{-1}^0 dy \int_{4y-4}^{8y^3} f(x, y) dx.$$

$$11) \int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$12) \int_{-5}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{-6y-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$13) \int_3^5 dx \int_{-\sqrt{8x-x^2}}^0 f(x, y) dy.$$

$$14) \int_{-3}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^0 f(x, y) dx.$$

$$15) \int_{-3}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy.$$

Локальный и глобальный экстремумы

1. Найдите точку локального минимума $M(x_0; y_0)$ функции $f(x; y) = x^2 - 2x + 2y^2$. В ответе укажите сумму $x_0 + y_0$.

2. Найдите точку локального минимума $M(x_0; y_0)$ функции $f(x; y) = 2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5$. В ответе укажите сумму $x_0 + y_0$.

3. Найдите точку локального максимума $M(x_0; y_0)$ функции $f(x; y) = -4x^2 - y^2 + 4y$. В ответе укажите сумму $x_0 + y_0$.
4. Найдите условные экстремумы функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.
5. Найдите наибольшее значение функции $z = 1 + x + 2y$ в 1-ой четверти ($x \geq 0, y \geq 0$).

Неопределенный интеграл, методы интегрирования.

1. Найдите интеграл $\int 2^{x+1} dx$.

1): $2^{x+2} + c$.

2): $\frac{2^{x+1}}{\ln 2} + c$;

3): $2^x \ln 2 + c$;

4): $\frac{2^x}{\ln 2} + c$.

2. Найдите интеграл $\int \left(\frac{x-1}{x^2} \right) dx$.

1): $\ln|x| - \frac{1}{x^2} + c$;

2): $\ln|x-1| + c$;

3): $(x-1)\ln|x| + c$;

4): $\frac{1}{x} \ln|x| + c$.

3. Найдите интеграл $\int x(x+1)^5 dx$.

1): $\frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{6} + c$;

2): $\frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + c$;

3): $\frac{(x+1)^7}{7} + c$;

4): $\frac{x(x+1)^6}{6} + c$.

4. Найдите интеграл $\int x(x-1)^4 dx$.

1): $\frac{(x-1)^6}{6} + c$;

$$2): \frac{x(x-1)^5}{5} + c;$$

$$3): \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^5}{5} + c;$$

$$4): \frac{x^2(x-1)^5}{5} + c.$$

5. Найдите интеграл $\int x(x-1)^{10} dx$.

$$1): \frac{(x-1)^{12}}{12} + \frac{(x-1)^{11}}{11} + c;$$

$$2): \frac{x(x-1)^{12}}{12} + c;$$

$$3): \frac{x^2(x-1)^{11}}{11} + c;$$

$$4): \frac{x^2(x-1)^{10}}{2} + c.$$

6. Укажите верные утверждения из приведенных ниже:

$$1): \int \sin x^2 \cdot 2x dx = \int \sin x^2 d(x^2);$$

2): если $F(x) = f(x)$, где $F(x)$ - первообразная от функции $f(x)$, то $f(x) = ce^x$;

$$3): \int \ln x^2 dx = 2 \int \ln |x| dx;$$

$$4): \int \frac{x - 2\sqrt{x} \sin x}{\sqrt{x}} dx = \int x dx - 2 \int \sin x dx.$$

7. Укажите верные утверждения из приведенных ниже:

$$1): \int \sin \sqrt{x} \cdot 2x dx = \int \sin \sqrt{x} dx \cdot \int 2x dx;$$

$$2): \int (\cos x - \sin x)^2 dx = \int dx - \int \sin 2x dx;$$

$$3): \int 6 \ln \sqrt[3]{x} dx = 2 \int \ln x dx$$

4): если $F(x) = f(x)$, где $F(x)$ - первообразная от функции $f(x)$, то $F(x) = \ln x$.

8. Укажите верные утверждения из приведенных ниже:

$$1): \int \ln \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \int \ln x dx;$$

$$2): \int 2x dx = x^2 + 4;$$

$$3): \int (\sin x + 1)^2 dx = \int \sin^2 x dx + \int 2 \sin x dx + \int dx;$$

$$4): \int 2^x \sqrt{x} dx = \int 2^x dx \cdot \int \sqrt{x} dx.$$

9. Функция $f(x)$ имеет производную $f'(x) = x + 1$. Укажите, какие из приведенных ниже функций могут считаться функцией $f(x)$:

- 1): $\frac{x^2}{2} + x + 2$;
- 2): $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 2$;
- 3): $\frac{x^2}{2} + x$;
- 4): $\frac{(x+1)^2}{2} - 2$

10. Укажите верные утверждения из приведенных ниже:

- 1): $\int x^{-10} dx = -\frac{1}{x^9} + c$;
- 2): $\int 3^{2x} dx = \frac{9^x}{\ln 9} + 3$;
- 3): $\frac{5x+1}{x+1} = 5 - \frac{4}{x+1}$;
- 4): $\int \cos(x-1) dx = -\sin(1-x) + c$.

11. Укажите верные утверждения из приведенных ниже:

- 1): $\int (2^{x+3} - 16\sqrt{x}) dx = 8 \left[\int 2^x dx - \int x dx \right]$;
- 2): $\int (\cos x + \sin x)^2 dx = \int dx + \int \sin 2x dx$;
- 3): если $F(x)$ - первообразная от функции $f(x)$, то $\left[F(x) - x^2 \right]$ - первообразная от функции $[f(x) - 2x]$;
- 4): если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные от одной функции $f(x)$ так, что $F_1(x) = 2F_2(x)$, то $f(x) = 0$.

Приложения определенного интеграла.

1. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:
 $y = \sqrt{2-x}$; $y = \sqrt{x}$; $y = 0$. В ответе укажите значение $3S$.
2. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:
 $y = \sqrt{8-x}$; $y = \sqrt{x}$; $y = 0$. В ответе укажите значение $3S$.
3. Запишите значение площади S фигуры, ограниченной линиями:
 $y = \sqrt{18-x}$; $y = \sqrt{x}$; $y = 0$.
4. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:
 $y = x^2$; $y = 1$. В ответе укажите значение $3S$.
5. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:
 $y = x^2$; $y = 4$. В ответе укажите значение $3S$.
6. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:

- $y = x^2 + 1$; $y = 2$. В ответе укажите значение $3S$.
7. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:
 $y = x^2$; $y = 2x$. В ответе укажите значение $3S$.
8. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:
 $y = x^2$; $y = -2x$. В ответе укажите значение $3S$.
9. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:
 $y = 4 - x^2$; $y = 0$. В ответе укажите значение $3S$.
10. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:
 $y = x^2 - 1$; $y = 0$. В ответе укажите значение $3S$.
11. Найдите площадь S фигуры, ограниченной линиями:
 $y = -x^2$; $y = 2x$. В ответе укажите значение $3S$.
12. Найдите площадь треугольника, образованного прямой
 $l: 3x - 4y = 12$ с осями координат.
13. Найдите площадь треугольника, образованного прямой
 $l: x + 2y - 4 = 0$ с осями координат.
14. Найдите площадь треугольника, образованного прямой
 $l: x - 3y + 6 = 0$ с осями координат.
15. Найдите площадь треугольника, образованного прямой
 $l: 2x + 3y - 6 = 0$ с осями координат.

Несобственный интеграл.

1. Вычислите несобственный интеграл с бесконечными пределами $J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. В ответе укажите значение $\frac{1}{\pi} J$.

2. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом $J = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{dx}{1+x^2}$.

3. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом

$$J = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(3+x)^2}. \text{ В ответе укажите значение } 4J.$$

4. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

5. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

6. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом

$$\int_1^{+\infty} \frac{2dx}{x^3}.$$

7. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x} dx .$$

8. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом

$$J = \int_0^{\infty} e^{-2x} dx . \text{ В ответе укажите значение } 2J .$$

9. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} . \text{ В ответе укажите значение } \frac{2}{\pi} J .$$

10. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции

$$J = \int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt[3]{x}} .$$

11. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} .$$

12. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции

$$J = \int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt[3]{1-x}} .$$

13. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}} .$$

14. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции

$$J = \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}} . \text{ В ответе укажите значение } 3J .$$

15. Вычислите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{2dx}{x+x^3} . \text{ В ответе укажите значение } 3J .$$

Числовые ряды. Сумма ряда. Признаки сходимости

1. Пользуясь одним из признаков сходимости, убедитесь в сходимости числового ряда

$$\frac{6}{1 \times 4} + \frac{6}{4 \times 7} + \dots + \frac{6}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$$

Найдите и запишите ее сумму.

2. Найдите и запишите сумму числового ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{9}{36} + \frac{27}{216} + \dots + \frac{3^n}{6^n} + \dots$$

+:1.0

3. Найдите и запишите сумму числового ряда

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$$

4. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos 2n}{n^2}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+3}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

5. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos^2 n}{n^2}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n}.$$

6. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n+5}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n.$$

7. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3n+7}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n^2}.$$

8. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{n!}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3 n + 7}{n^3}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

9. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^5}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{5n+3}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

10. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{n^2+2} - n); 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^{2n}.$$

11. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n+1}\right)^2; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5+n}{n^2}\right)^2; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}.$$

12. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^4+2}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n.$$

13. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{4n-1}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + 1}{n^2}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}.$$

14. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 n + 5}{n^2}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{2n}.$$

15. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n); 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - \sin 2n}{n^2}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2\sqrt{n}}{3n\sqrt{n}}.$$

16. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}}{n!}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4 + 3} - n^2).$$

Степенные ряды и приближенные вычисления значений функций и определенных интегралов

1. Сколько нужно взять членов ряда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

чтобы найти число e^{-1} с точностью до 0,01?

2. Сколько нужно взять членов ряда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

чтобы найти число $e^{-1/2}$ с точностью до 0,01?

3. Сколько нужно взять членов ряда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots,$$

чтобы найти число $\ln 2$ с точностью до 0,01?

4. Сколько нужно взять членов ряда

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots,$$

чтобы найти число $\sin 0.5$ с точностью до 0,01?

5. Сколько нужно взять членов ряда

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

чтобы найти число $\cos 0.5$ с точностью до 0,01? е 6. Найдите радиус сходимости

степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

7. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

8. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$.

9. Найдите радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$. В ответе укажите значение $3R$.

10. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

11. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$.

12. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$.

13. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

14. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}$.

15. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{5n-1}$.

16. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-7)^n}{n+5}$.

17. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^{2n}}$.

18. Используя разложение функции e^x в ряд Маклорена, вычислите приближенно e^{-1} с точностью до $\Delta = 0.01$.

19. Используя разложение функции $\cos x$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\cos 1$ с точностью до $\Delta = 0.01$.

20. Используя табличное разложение функции $(1+x)^\alpha$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sqrt{11}$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

21. Используя табличное разложение функции $(1+x)^\alpha$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sqrt[3]{30}$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

22. Используя табличное разложение функции $(1+x)^\alpha$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sqrt{84}$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

23. Разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена, вычислите приближенно

интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ с точностью до $\Delta = 0.0001$.

24. Разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена, вычислите приближенно

интеграл $\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4}$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

25. Разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена, вычислите приближенно

интеграл $\int_0^{0.25} \ln(1+\sqrt{x}) dx$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

Двойной интеграл

1. Вычислите двойной интеграл

$$\iint_D (x+5y) dx dy, \quad D = \{(x; y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} :$$

2. Вычислите двойной интеграл

$$\iint_D (x^2 + y^2 + 2) dx dy, \quad D = \{(x; y) \mid 2 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3\}$$

3. Вычислите двойной интеграл

$$\iint_D (x+y) dx dy, \quad \text{где } D \text{ – множество точек плоскости, ограниченное линиями}$$

$$y = x, y = x^2.$$

4. Вычислите двойной интеграл

$$\iint_D 4xy dx dy, \quad \text{где } D \text{ – множество точек плоскости, ограниченное прямыми}$$

$$x = 1, y = x, y = 3x.$$

5. Вычислите двойной интеграл

$$\iint_D 2^{y-x} dx dy, \quad \text{где } D \text{ – множество точек плоскости, ограниченное прямыми}$$

$$x = 0; x = \ln 2; y = x; y = x + 1.$$

6. Вычислите двойной интеграл

$$\iint_D xy dx dy, \quad \text{где } D \text{ – множество точек плоскости, ограниченное линиями}$$

$$y = 0, y = 1 - x^2.$$

7. Вычислите двойной интеграл:

$$\iint_D x dx dy, \quad \text{где } D \text{ – множество точек плоскости, ограниченное линиями}$$

$$x = -1, x = 2, y = x + 2, y = x^2.$$

8. Вычислите двойной интеграл, переходя к полярным координатам:

$$J = \iint_D (4x^2 + 4y^2 + 6) dx dy, \text{ где } D = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

В ответе укажите значение J/π .

9. Вычислите двойной интеграл, переходя к полярным координатам:

$$J = \iint_D (3\sqrt{x^2 + y^2} - 2) dx dy, \text{ где } D = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

В ответе укажите значение J/π .

Приложения двойного интеграла

1. Найдите сумму координат центра тяжести однородного треугольника, ограниченного прямыми:

$$x + y = 1; \quad x = 0; \quad y = 0.$$

2. Вычислите ординату y_0 центра тяжести однородной пластины, занимающей верхнюю половину круга: $x^2 + y^2 \leq 25, (y \geq 0)$. В ответе укажите значение $3\pi y_0$.

3. Вычислите ординату y_0 центра тяжести однородной пластины, занимающей верхнюю половину круга: $x^2 + y^2 \leq 9, (y \geq 0)$. В ответе укажите значение πy_0 .

4. Вычислите ординату y_0 центра тяжести однородной пластины, занимающей верхнюю половину круга: $x^2 + y^2 \leq 4, (y \geq 0)$. В ответе укажите значение $3\pi y_0$.

5. Вычислите момент инерции J_{00} квадрата со стороной $a = 2$ относительно оси, проходящей через его вершину перпендикулярно к плоскости квадрата. В ответе укажите значение $3J_{00}$.

6. Вычислите момент инерции однородной пластины в форме прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0, x = 2, y = 0, y = 3$ относительно начала координат.

7. Вычислите момент инерции J_{00} однородной пластины в форме прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$ относительно начала координат. В ответе укажите значение $3J_{00}$.

8. Вычислите момент инерции относительно оси x для однородной пластины в форме треугольника, образованного прямыми $x + y = 2, x = 2, y = 2$. Представьте чертеж.

9. Вычислите момент инерции J_{00} квадрата со стороной $a = 2$ относительно оси, проходящей через его вершину перпендикулярно к плоскости квадрата. В ответе укажите значение $3J_{00}$.

Криволинейный интеграл. Формула Грина (о связи криволинейного и двойного интегралов).

1. Применяя формулу Грина, вычислите интеграл

$$J = \oint_C -x^2 y dx + xy^2 dy \quad \text{по окружности } C: x^2 + y^2 = 4,$$

пробегаемой против хода часовой стрелки. В ответе запишите J/π .

2. Найдите криволинейный интеграл от векторного поля $\vec{F}(x; y)$ вдоль кривой $L(t)$ в направлении возрастания параметра t :

$$\vec{F}(x; y) = (y; x + y); L: x = t, y = t, 0 \leq t \leq 1.$$

3. Найдите криволинейный интеграл от векторного поля $\vec{F}(x; y)$ вдоль кривой $L(t)$ в направлении возрастания параметра t : $\vec{F}(x; y) = (x; y^2); L: x = t^2, y = t, 0 \leq t \leq 1$.

4. Найдите криволинейный интеграл от векторного поля $\vec{F}(x; y)$ вдоль кривой $L(t)$ в направлении возрастания параметра t : $\vec{F}(x; y) = (x; y^2); L: x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1$.

5. Найдите криволинейный интеграл от векторного поля $\vec{F}(x; y)$ вдоль кривой $L(t)$ в направлении возрастания параметра t :

$$\vec{F}(x; y) = (y; x + y); L: x = t^2, y = t, 0 \leq t \leq 1.$$

6. Найдите криволинейный интеграл от векторного поля $\vec{F}(x; y)$ вдоль кривой $L(t)$ в направлении возрастания параметра t : $\vec{F}(x; y) = (x; y^2); L: x = t, y = t, 0 \leq t \leq 1$.

7. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_{L_{OA}} 2xy dx - x^2 dy$$

вдоль прямой L_{OA} , выходящей из начала координат $O(0;0)$ и заканчивающейся в точке $A(2;1)$.

8. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_{L_{OA}} 2xy dx - x^2 dy$$

вдоль параболы L_{OA} , осью симметрии которой является ou , выходящей из начала координат $O(0;0)$ и заканчивающейся в точке $A(2;1)$.

9. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_{L_{OA}} 2xy dx - x^2 dy$$

вдоль параболы L_3 , осью симметрии которой является ox , выходящей из начала координат $O(0;0)$ и заканчивающейся в точке $A(2;1)$.

10. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy$$

вдоль ломаной $L_4 = L_{OBA}$, (где $B(2;0)$),

выходящей из начала координат $O(0;0)$ и заканчивающейся в точке $A(2;1)$.

11. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy$$

вдоль ломаной $L_5 = L_{OCA}$, (где $C(0;1)$),

выходящей из начала координат $O(0;0)$ и заканчивающейся в точке $A(2;1)$.

12. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_{L_{OA}} 2xydx + x^2dy$$

вдоль различных путей (см. предыдущий пример), выходящих из начала координат $O(0;0)$ и заканчивающихся в точке $A(2;1)$:

а) прямой $L_1 = L_{OA}$;

б) параболы L_2 , осью симметрии которой является Oy ;

в) параболы L_3 , осью симметрии которой является Ox ;

г) ломаной $L_4 = L_{OBA}$, где $B(2;0)$;

д) ломаной $L_5 = L_{OCA}$, где $C(0;1)$.

Задания для контрольной работы:

Тема 4. Дифференциальные исчисления функции одной переменной

Задание. Вычислить предел функции f в точке a с помощью правил Лопиталья.

1. $f(x) = \frac{\sqrt{1-6x} - 1 + 2x}{x^2}, a = 0.$

2. $f(x) = \frac{e^{x/2} - 2 - x}{x^2}, a = 0.$

3. $f(x) = \frac{6\sin 2x - 12x}{x^3}, a = 0.$

4. $f(x) = \frac{\sqrt{1+4x} - 1 - 2x}{x^2}, a = 0.$

5. $f(x) = \frac{3\operatorname{tg} 2x - 6x}{x^3}, a = 0.$

$$6. f(x) = \frac{\ln(1-3x) + 3x}{x^2}, a = 0.$$

$$7. f(x) = \frac{e^{-5x} - 1 + 5x}{x^2}, a = 0.$$

$$8. f(x) = \frac{\arcsin 4x - 4x}{x^3}, a = 0.$$

$$9. f(x) = \frac{2\sin 3x - 6x}{x^3}, a = 0.$$

$$10. f(x) = \frac{2\ln(1+0,5x) - x}{x^2}, a = 0.$$

$$11. f(x) = \frac{x-1}{\ln x}, a = 1.$$

$$12. f(x) = \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}, a = 0.$$

$$13. f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x+2)}{x+2}, a = -2.$$

$$14. f(x) = \frac{(x-3)^2}{\sin^2(x-3)}, a = -2.$$

$$15. f(x) = \frac{4^{\sin x} - 1}{\sin 2x}, a = 0.$$

Тема 11 : Числовые ряды.

Задание . Найдите сумму ряда.

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}.$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}.$$

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{9n^2 - 6nn - 8}.$$

$$4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8}.$$

$$5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}.$$

$$6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{14}{49n^2 - 28n - 45}.$$

$$7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2}.$$

$$8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{49n^2 - 7n - 12}.$$

$$9) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}.$$

$$10) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{36n^2 - 24n - 5}.$$

$$11) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}.$$

$$12) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{9n^2 + 3n - 20}.$$

$$13) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{16n^2 - 8n - 15}.$$

$$14) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6}.$$

$$15) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}.$$

Контролируемые компетенции: ОПК-1, ОПК-3

Оценка компетенций осуществляется в соответствии с таблицей 4.

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
2. Дифференцирование сложной функции.
3. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
4. Формула Тейлора.
5. Квадратичная форма второго дифференциала: матрица Гессе и ее определитель.
6. Критические и стационарные точки функций многих переменных.
7. Локальный экстремум, необходимое и достаточное условия.
8. Условный экстремум. Функция Лагранжа.
9. Первообразная от функции. Неопределенный интеграл и его свойства.
10. Метод подстановки в неопределенном интеграле.
11. Метод замены переменной в неопределенном интеграле.
12. Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле.
13. Интегрирование дробно-рациональных функций.
14. Интегрирование простейших тригонометрических функций.
15. Определенный интеграл. Достаточное условие существования.
16. Свойства определенного интеграла.
17. Формула Ньютона-Лейбница.
18. Метод подстановки и замены переменной в определенном интеграле.
19. Несобственные интегралы.
20. Геометрические приложения определенного интеграла: длина дуги кривой.
21. Геометрические приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры, ограниченной двумя заданными кривыми.
22. Геометрические приложения определенного интеграла: объем тела вращения.

23. Геометрические приложения определенного интеграла: площадь поверхности вращения.
24. Основные понятия о числовых рядах.
25. Два признака сравнения для положительных числовых рядов.
26. Признак Даламбера для положительных рядов.
27. Интегральный признак сходимости для положительных рядов.
28. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов.
29. Признак Абеля.
30. Теорема Абеля о сходимости степенного ряда. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.
31. Ряд Тейлора.
32. Приближенные вычисления с помощью рядов.

